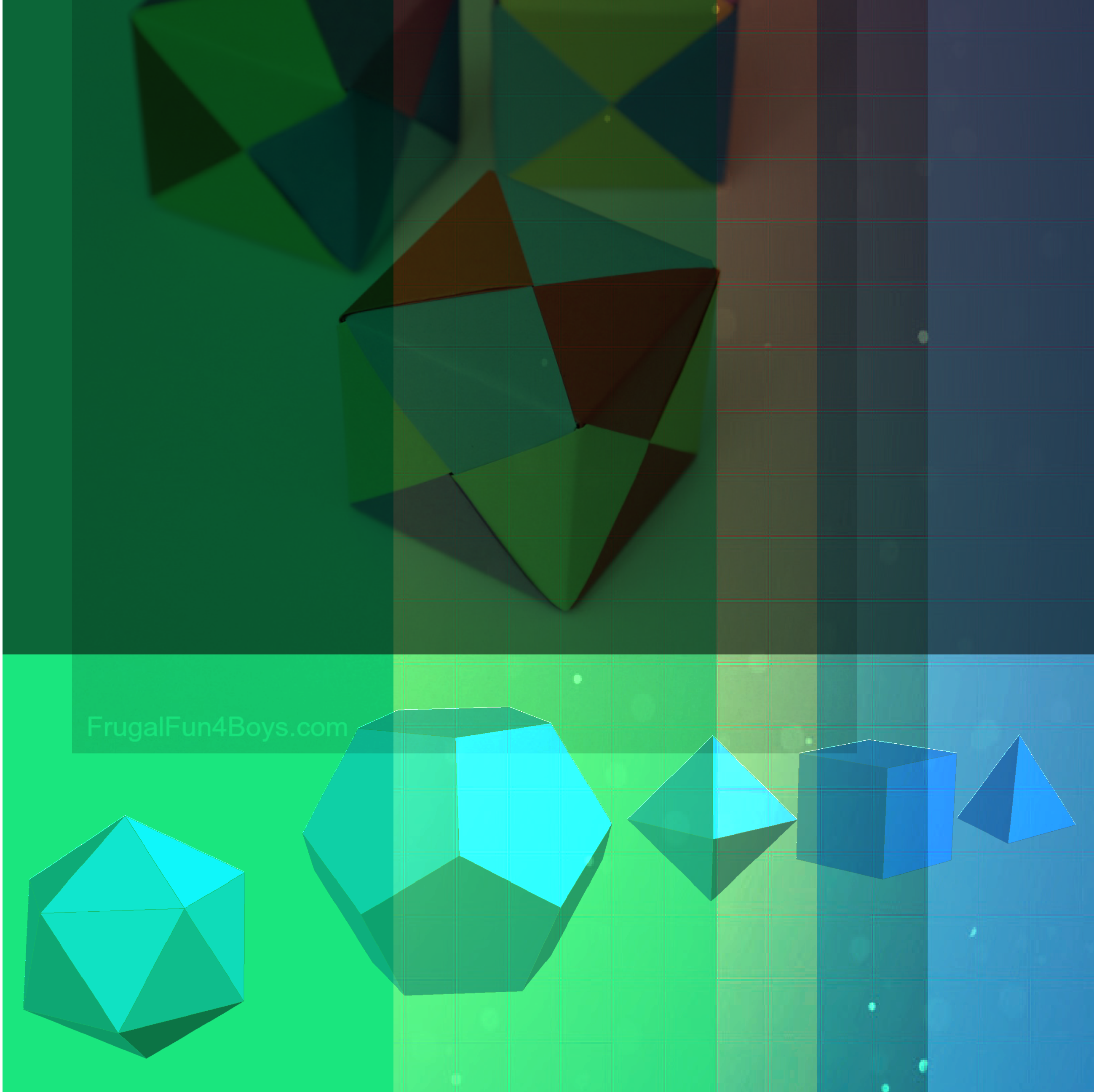


Tópicos de álgebra lineal

Julio C. Barros y Valentina Orquera

Colección PASATEXTOS

UniRío editora

ISBN 978-987-688-264-4

e-book

Barros, Julio C.
Tópicos de álgebra lineal / Julio C. Barros ; Valentina Orquera. - 1a ed. - Río Cuarto : UniRío Editora, 2018.
Libro digital, PDF - (Pasatextos)

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-688-264-4

1. Álgebra Lineal. I. Orquera, Valentina II. Título
CDD 515.14

Tópicos de álgebra lineal
Julio C. Barros y Valentina Orquera

ISBN 978-987-688-264-4

Primera Edición: *Julio de 2018*

Índice general

Dedicado a mi madre Dora, mi tía Dory, a mis hermanos y sobrinos.
Con mi mayor gratitud.
Julio

Dedicado a mi familia.
Valentina

AGRADECIMIENTOS

Expresamos nuestro profundo agradecimiento a las docentes Prof. Victoria Navarro y Lic. Claudina Canter por su exhaustiva lectura de nuestros borradores y por sus sugerencias a fin de que el texto adquiriera claridad y ágil lectura. Hacemos extensivo nuestro reconocimiento a la Ing. María Nidia Ziletti, a la Mg. M. A. Méndez y al Mg. Jorge Daghero por dar su aval para que esta publicación se hiciera posible. A nuestros alumnos que aportaron sus opiniones y correcciones al hacer uso de los borradores de este material. Agradecemos a la Secretaría Académica y la Secretaría Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de Río Cuarto y a UniRío-editora por brindarnos esta oportunidad.

Prólogo

El objetivo esencial al escribir Tópicos de Álgebra Lineal es brindar a los alumnos de primer año de las carreras de matemática, física, computación y otras disciplinas que hacen uso del Álgebra Lineal, un material que contenga los temas centrales de esta rama de la matemática. Al decidir comenzar con el tema de espacios vectoriales, somos conscientes del abanico de conceptos previos que el alumno debe operativamente emplear e. g. operaciones con vectores en $\mathbb{R}^n$, operaciones con matrices, sistemas de ecuaciones entre otros. La resolución de comenzar presentando la estructura de espacio vectorial es motivada por el hecho que entendemos, que hay que dar un tratamiento acompasado de los temas nucleares de este capítulo como lo son combinaciones lineales, dependencia e independencia lineal, base y dimensión. A partir de un recorte adecuado de estos conceptos se construyen otras ideas centrales como lo son la de coordenadas y cambio de coordenadas. La estructura de espacio vectorial se ve enriquecida con nociones métricas cuando se lo dota con un producto interno, estas ideas se desarrollan en el segundo capítulo. Las transformaciones lineales son tratadas en el tercer capítulo. Al desarrollar el tema de transformaciones lineales, se hace particular énfasis en el tratamiento de la matriz asociada a una transformación lineal, y como se puede recuperar toda la información referente a núcleo e imagen a partir de dicha matriz. Sobre el final del capítulo tres se hace un tratamiento breve de las transformaciones ortogonales haciendo nexo con la estructura de espacio con producto interno y recuperando elementos geométricos. La noción de determinante ha sido abordada en forma sucinta, y está pensado como herramienta para aplicar al problema de valores propios. Al abordar el problema de vectores y valores propios, se puede apreciar todo el potencial que tienen las ideas construidas en los apartados precedentes. La diagonalización de matrices es presentado en su forma más elemental pero introduciendo elementos que sirven para una profundización en este tópico. El grado de abstracción para aproximarse a la idea de espacio dual puede resultar un poco arduo al principio, pero rinde su fruto al hacer el tratamiento de coordenadas y soluciones de sistema de ecuaciones. Invariantes bajo semejanza de matrices nos pareció un corolario adecuado de presentar para cerrar este material y da una idea de la potencia de las ideas tratadas.
Los autores han decidido presentar este libro para su publicación en formato e-book, eligiendo como anclaje la UniRío Editora. La edición de esta obra en versión digital es una apuesta a la circulación y democratización del conocimiento para la enseñanza académica de grado y su vertiente científica. Esperamos que este material sea de utilidad a nuestros alumnos y lectores en general.

Los autores

Capítulo 1

Espacios Vectoriales

En este capítulo estudiaremos algunos conjuntos de objetos que cumplen con ciertos axiomas, a dichos objetos los denominaremos *vectores*. La idea es generalizar las operaciones de suma y producto por un escalar estudiadas en el caso de $\mathbb{R}^n$. En este contexto más general los *vectores* pueden ser polinomios, matrices, funciones, etc. El desarrollo de esta estructura nos proporcionará una herramienta potente, que trasciende la idea geométrica que tenemos de los vectores mirados como segmentos orientados.

1.1. Espacios vectoriales

Comenzamos dando una definición axiomática de lo que entenderemos por estructura de espacio vectorial.

Definición 1.1.1 *Sea $\mathbb{V}$ un conjunto no vacío y $\mathbb{K}$ un cuerpo y dos operaciones suma $\underset{\mathbb{V}}{+}$ y producto $(*)$. El objeto $(\mathbb{V}, \underset{\mathbb{V}}{+}, \mathbb{K}, *)$ es un espacio vectorial si cumple las siguientes propiedades:*

A1) La suma $(\underset{\mathbb{V}}{+})$ es una ley de composición interna en $\mathbb{V}$.
Esto significa que para todo par de elementos $u, v \in \mathbb{V}$, el elemento $u + v \in \mathbb{V}$ es decir:

$$\forall u, v \in \mathbb{V} \Rightarrow u \underset{\mathbb{V}}{+} v \in \mathbb{V}$$

A2) La suma es asociativa en $\mathbb{V}$

$$\forall u, v, w \in \mathbb{V} \Rightarrow (u \underset{\mathbb{V}}{+} v) \underset{\mathbb{V}}{+} w = u \underset{\mathbb{V}}{+} (v \underset{\mathbb{V}}{+} w)$$

A3) Existe un único elemento neutro para la suma en $\mathbb{V}$.

$$\exists 0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V} : u \underset{\mathbb{V}}{+} 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}} \underset{\mathbb{V}}{+} u = u \quad \forall u \in \mathbb{V}$$

A4) Todo elemento de $\mathbb{V}$ admite un opuesto o inverso aditivo.

$$\forall u \in \mathbb{V}, \ \exists \ w \in \mathbb{V} : u \underset{\mathbb{V}}{+} w = w \underset{\mathbb{V}}{+} u = 0_{\mathbb{V}}$$

Observar que si existe w, este es único y se lo denota $w = -u$.

A5) La suma es conmutativa en $\mathbb{V}$.

$$\forall u, v \in \mathbb{V} \Rightarrow u \underset{\mathbb{V}}{+} v = v \underset{\mathbb{V}}{+} u$$

A6) El producto es la ley de composición externa en $\mathbb{V}$ con escalares en $\mathbb{K}$, es decir

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad y \quad \forall u \in \mathbb{V} \Rightarrow \alpha * u \in \mathbb{V}$$

A esta propiedad se la llama ley de cierre para el producto.

A7) El producto satisface la propiedad de asociatividad mixta.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbb{V} \Rightarrow \alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u$$

A8) El producto es distributivo con respecto a la suma en $\mathbb{K}$.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall u \in \mathbb{V} \Rightarrow (\alpha + \beta) * u = \alpha * u \underset{\mathbb{V}}{+} \beta * u$$

A9) El producto es distributivo con respecto a la suma en $\mathbb{V}$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{V} \Rightarrow \alpha * (u \underset{\mathbb{V}}{+} v) = \alpha * u \underset{\mathbb{V}}{+} \alpha * v$$

A10) La unidad del cuerpo es el neutro del producto.

$$1 \in \mathbb{K} \ y \ \forall u \in \mathbb{V} \Rightarrow 1 * u = u$$

Nota: En esta sección cuando declaramos $\mathbb{K}$ el cuerpo de escalares se piensa en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ el cuerpo de los reales pero, toda la teoría desarrollada es válida para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos.

Ejemplo 1.1.2 *Un primer ejemplo de espacio vectorial, consideremos:*

i) Conjunto de vectores: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq n\}$

ii) El conjunto de escalares es $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dotado con estructura de cuerpo.

A1) Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ tales que, $u = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. Se define la suma en $\mathbb{V}$ como sigue,

$$u \underset{\mathbb{V}}{+} v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

Luego si $u, v \in \mathbb{V} \Rightarrow u + v \in \mathbb{V}$. Es decir la operación es cerrada en $\mathbb{V}$. La suma de dos vectores del conjunto es un elemento de $\mathbb{V}$.

A2) La suma es asociativa, es decir, si $u, v, w \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^n$

$$(u \underset{\mathbb{V}}{+} v) \underset{\mathbb{V}}{+} w = u \underset{\mathbb{V}}{+} (v \underset{\mathbb{V}}{+} w)$$

A3) Existe un elemento que es neutro para la suma en $\mathbb{V}$. Dados, $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $0_{\mathbb{V}} = \mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$

$$\Rightarrow u \underset{\mathbb{V}}{+} \mathbf{0} = \mathbf{0} \underset{\mathbb{V}}{+} u = u$$

A4) Todo elemento de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ admite un opuesto o inverso aditivo.
Sea $u \in \mathbb{R}^n \Rightarrow u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y consideremos $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ tal que $u \underset{\mathbb{V}}{+} w = (x_1 + w_1, x_2 + w_2, ..., x_n + w_n) = \mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ entonces, por la igualdad de vectores en $\mathbb{R}^n$ se tiene que $w_i = -x_i \;\; \forall i$, luego, $w = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ es un vector tal que $u \underset{\mathbb{V}}{+} w = w \underset{\mathbb{V}}{+} u = \mathbf{0}$, es decir el opuesto del vector u es $w = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$

A5) La suma en $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ es conmutativa $\forall u, v \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ entonces,

$$u \underset{\mathbb{V}}{+} v = v \underset{\mathbb{V}}{+} u$$

A6) Producto por un escalar.
Para $\alpha \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ definimos,

$$\alpha * u = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

Así obtenemos nuevamente una n-upla es decir $\alpha * u \in \mathbb{V}$ en donde cada componente $\alpha x_i \in \mathbb{R} \; \forall i$. Con esta definición el producto por un escalar es cerrado.

A7) Propiedad asociativa mixta para escalares.
Sea $u \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si consideramos a $u = (x_1, x_2, ..., x_n)$ entonces,

$$\alpha * \underbrace{(\beta * u)}_{v} = \alpha * v = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), ..., \alpha(\beta x_n))$$

donde hemos llamado $v = \beta * u = (\beta x_1, \beta x_2, ..., \beta x_n)$. Luego por la propiedad asociativa de los números reales tenemos que,

$$((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, ..., (\alpha\beta)x_n) = (\alpha\beta) * u$$

Es decir,

$$\alpha * (\beta * u) = (\alpha\beta) * u \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; \forall u \in \mathbb{V}$$

A8) El producto es distributivo respecto de la suma en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Sea $u = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) * u &= ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, ..., (\alpha + \beta)x_n) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, ..., \alpha x_n + \beta x_n) \;\; (distributiva \;\; en \;\; \mathbb{R}) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) +_{\mathbb{V}} (\beta x_1, \beta x_2, ..., \beta x_n) \;\; (def. \;\; de \;\; suma) \\ &= \alpha * u + \beta * u \;\; (def. \;\; de \;\; producto) \end{aligned}$$

A9) El producto es distributivo respecto de la suma en $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se deja como ejercicio verificar:

$$\alpha * (u \underset{\mathbb{V}}{+} v) = \alpha * u \underset{\mathbb{V}}{+} \alpha * v$$

A10) Existe un elemento neutro para el producto por un escalar. Verificar que:

$$1 \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 * u = u \ \forall u \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^n$$

Como $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ satisface las propiedades de A1) a A10), decimos que $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. También suele decirse que la cuaterna $(\mathbb{R}^n, \underset{\mathbb{V}}{+}, \mathbb{R}, *)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Ejemplo 1.1.3 *Sea* $(\mathbb{R}^{2\times2}, \underset{\mathbb{R}^{2\times2}}{+}, \mathbb{R}, *)$ *con las operaciones definidas por:*

- *Sea* $u, v \in \mathbb{R}^{2\times2} : u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \ v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ *se define la suma como,*

$$u \underset{\mathbb{R}^{2\times2}}{+} v = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

  es decir, es la suma usual de matrices.

- *Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^{2\times2}$ *se define el producto por un escalar como,*

$$\alpha * u = \begin{pmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{pmatrix}$$

Veamos si $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times2}$ *con esta suma y este producto cumple con la definición de espacio vectorial.*

- *Se deja como ejercicio probar que se cumplen los axiomas de (A1) hasta (A5)*
- *Al analizar los axiomas definidos para el producto, si miramos el (A8), la propiedad distributiva para la suma de escalares vemos que, por un lado :*

$$(\alpha + \beta) * u = \begin{pmatrix} (\alpha + \beta)a & b \\ (\alpha + \beta)c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a & b \\ \alpha c + \beta c & d \end{pmatrix}$$

  Por otro lado:

$$\alpha * u \underset{\mathbb{R}^{2\times2}}{+} \beta * u = \begin{pmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a & b \\ \beta c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a & 2b \\ \alpha c + \beta c & 2d \end{pmatrix}$$

  Por lo que resulta

$$\begin{pmatrix} \alpha a + \beta a & b \\ \alpha c + \beta c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a & 2b \\ \alpha c + \beta c & 2d \end{pmatrix}$$

  Luego para el producto así definido, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times2}$ *no resulta espacio vectorial.*

Nota: *Es conveniente aclarar que si al menos uno de los axiomas de espacio vectorial no se cumple entonces, el ente propuesto no resulta espacio vectorial.*

1.1.1. Propiedades de los espacios vectoriales

Propiedad 1.1.4 *Sea* $(\mathbb{V}, \underset{\mathbb{V}}{+}, \mathbb{K}, *)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial* $\Rightarrow 0 * v = 0_{\mathbb{V}} \ \ \forall v \in \mathbb{V}$

Propiedad 1.1.5 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial* $\Rightarrow \alpha * 0_{\mathbb{V}} = 0_{\mathbb{V}} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Propiedad 1.1.6 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial* $\Rightarrow (-\alpha)*v = -(\alpha*v) = -\alpha*v \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K};\ v \in \mathbb{V}$.

Ejercicio 1.1.7 *Demostrar las propiedades 1.1.4, 1.1.5 y 1.1.6.*

1.2. Subespacios

En esta sección estudiaremos ciertos subconjuntos distinguidos de un espacio vectorial. A los subconjunto de vectores de un cierto espacio vectorial $\mathbb{V}$, que preserven la suma y el producto por un escalar, cuando nos restringimos a los elementos de dicho subconjunto, los denominaremos *subespacios*. Con más precisión:

Definición 1.2.1 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, un subconjunto $\mathbb{S} \neq \emptyset$; $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ se dice* ***subespacio*** *de $\mathbb{V}$, si el subconjunto $\mathbb{S}$ es en si mismo un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones $\underset{\mathbb{V}}{+}$ y $*$*

Ejercicio 1.2.2 *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ considerado como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, con la suma y el producto usual, y sea*

$$\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0\}$$

Demostrar que $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 1.2.3 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, un subconjunto $\mathbb{S} \neq \emptyset$; $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ si y sólo si satisface las dos siguientes propiedades:*

1. *$\forall v, w \in \mathbb{S}$ se cumple que, $v \underset{\mathbb{V}}{+} w \in \mathbb{S}$*

2. *$\forall v \in \mathbb{S}$; $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ se satisface que, $\lambda * v \in \mathbb{S}$*

Demostración 1.2.4

- *$\Rightarrow$) Puesto que $\mathbb{S}$ es subespcio de $\mathbb{V}$ satisface los axiomas de A1) a A10), en particular, si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in \mathbb{S}$ entonces, por el axioma A6) $\lambda * v \in \mathbb{S}$. Sea $w \in \mathbb{S}$ ya vimos que, $\lambda * v \in \mathbb{S}$ luego, por el axioma A7), $1 * v = v \in \mathbb{S}$ y por el axioma A1) $v \underset{\mathbb{V}}{+} w \in \mathbb{S}$, $\forall v, w \in \mathbb{S}$.*

- *$\Leftarrow$) Supongamos ahora que, se cumplen 1) y 2) es decir que se satisfacen los axiomas A1) y A6). La asociatividad y conmutatividad de la suma son heredadas. Para ver La existencia del neutro de la suma, observemos que, $0 * v \in \mathbb{S}$ pero por la propiedad 1.1.4 se tiene, $0 * v = 0_{\mathbb{V}} \in \mathbb{S}$. Para ver la existencia de inverso aditivo consideremos $\lambda = -1$ entonces, $-1 * v \in \mathbb{S}$ por la propiedad 1.1.6 se tiene, $-1 * v = -v \in \mathbb{S}$. Las propiedades para los escalres, axiomas A7) a A10) se heredan.*

$\square$

Ejercicio 1.2.5 *Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, demostrar que:*

a) *$\mathbb{S} = \mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.*

b) *$\mathbb{S} = \{0_{\mathbb{V}}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.*

A estos subespacios se los llaman ***subespacios triviales****.*

Ejemplo 1.2.6 *Retomando el ejercicio 1.2.2,*

$$\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0\}$$

Para ver que es un subespacio de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, es suficiente probar:

1) *Ciertamente $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$, por la definición de $\mathbb{S}$*

2) $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in \mathbb{S}$ *esto se cumple porque el vector* $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ *satisface,* $0+3\cdot 0-7\cdot 0 = 0$, *esto nos dice que,* $S \neq \emptyset$.

3) Si $v, w \in \mathbb{S}$ *y supongamos que,* $v = (x_1, x_2, x_3)$ *y* $w = (y_1, y_2, y_3)$ *entonces,* $v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$. *Al reemplazar en la ecuación que define el subespacio* $\mathbb{S}$ *por las coordenadas del vector* $v + w$ *se obtiene:*

$$(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - 7(x_3 + y_3) = \underbrace{(x_1 + 3x_2 - 7x_3)}_{=0} + \underbrace{(y_1 + 3y_2 - 7y_3)}_{=0} = 0 + 0 = 0$$

Luego, $v + w \in \mathbb{S}$

4) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $v \in \mathbb{S}$, $v = (x_1, x_2, x_3)$ *entonces,* $\alpha v = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$. *Al sustituir en la ecuación que define el subespacio* $\mathbb{S}$ *por las coordenadas del vector* αv,

$$(\alpha x_1) + 3(\alpha x_2) - 7(\alpha x_3) = \alpha \underbrace{(x_1 + 3x_2 - 7x_3)}_{=0} = \alpha 0 = 0$$

es decir $\alpha v \in \mathbb{S}$. *Por el Teorema 1.2.3 se concluye que* $\mathbb{S}$ *es un subespacio de* $\mathbb{R}^3$.

Desde el punto de vista geométrico $\mathbb{S}$, *es un plano que pasa por el origen.*

Ejercicio 1.2.7 *Sea* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ *considerado como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial, definimos:*

$$\mathbb{H} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : \langle x, v\rangle = 0\}$$

Donde, $v = (a_1, a_2, ..., a_n) \neq 0$ *es un vector fijo. Demostrar que* $\mathbb{H}$ *es un subespacio de* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$. *Al subespacio* $\mathbb{H}$ *se lo denomina* ***Hiperplano*** *(por el origen) de* $\mathbb{R}^n$. *Por ejemplo:*

- *Si* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ *los hiperplanos de* $\mathbb{R}^2$ *son las rectas por el origen.*
- *Si* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ *los hiperplanos de* $\mathbb{R}^3$ *son los planos por el origen.*

1.2.1. Operaciones con subespacios

En esta sección se verá como producir nuevos subespacios, a partir de ciertos subconjuntos de un espacio vectorial dado, que tienen estructura de subespacio.

Proposición 1.2.8 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y sean* $\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{V}$, $\mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{V}$ *subespacios de* $\mathbb{V}$ *entonces,* $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ *es un subespacio de* $\mathbb{V}$.

Demostración 1.2.9 *De acuerdo con el Teorema 1.2.3 hay que probar que el producto por un escalar es cerrado en* $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ *y que la suma es cerrada en* $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$. *Para ello,*

1. *Sean* $v, w \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ *luego,* $v, w \in \mathbb{S}_1$ *y* $v, w \in \mathbb{S}_2$. *Como tanto* $\mathbb{S}_1$ *como* $\mathbb{S}_2$ *son subespacios de* $\mathbb{V}$ *entonces,* $v + w \in \mathbb{S}_1$ *y* $v + w \in \mathbb{S}_2$, *por lo tanto,* $v + w \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$. *De esta forma resulta la suma cerrada.*

2. *Sea* $v \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Como* $v \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ *entonces,* $v \in \mathbb{S}_1$ *y* $v \in \mathbb{S}_2$, *luego,* $\lambda v \in \mathbb{S}_1$ *y* $\lambda v \in \mathbb{S}_2$. *Resulta pues que,* $\lambda v \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$. *Puesto que se cumplen 1) y 2) del teorema 1.2.3,* $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ *resulta un subespacio de* $\mathbb{V}$.

□

Ejercicio 1.2.10 *Sea* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ *como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial, y sean*

$$\mathbb{S}_1 = \{v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

$$\mathbb{S}_2 = \{w = \lambda(1, 0, 1) + \alpha(0, 1, -1) \quad \lambda, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

¿Qué subespacio de $\mathbb{R}^3$ *es* $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$*?. Describir geométricamente.*

El siguiente teorema es una generalización de la proposición 1.2.8.

Teorema 1.2.11 *Sea* $\{\mathbb{S}_i\}_{i\in I}$ *una familia de subespacios del* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial* $\mathbb{V}$*, entonces, la interseccion de esta familia de subespacios es un subespacio de* $\mathbb{V}$.

Demostración 1.2.12 *Se deja como ejercicio. Sugerencia: Considerar* $\mathbb{S} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{S}_i$ *y probar que* $\mathbb{S}$ *cumple con las propiedades 1) y 2) del Teorema 1.2.3.*

Observación 1.2.13 *La unión de subespacios no es necesariamente un subespacio.*

Ejercicio 1.2.14 *Consideremos:*

$$\mathbb{S}_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$$

$$\mathbb{S}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 0\}$$

Mostrar que $\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$ *No es un subespacio de* $\mathbb{R}^2$

Como la unión de dos subespacios en general no resulta un subespacio, la idea es construir un subespacio que contenga a los subespacios dados. Es por ello que damos la siguiente:

Definición 1.2.15 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial,* $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{V}$ *subespacios de* $\mathbb{V}$ *se define la* ***suma*** *de los subespacios* $\mathbb{S}_1$ *y* $\mathbb{S}_2$ *como:*

$$\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 = \{v \in \mathbb{V} : v = s_1 + s_2, \; s_i \in \mathbb{S}_i \;, i = 1, 2\}$$

La suma de subespacios no sólo contiene a ambos subespacios además, tiene estructura de subespacio, como lo demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.2.16 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial,* $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{V}$ *subespacios de* $\mathbb{V}$*. Entonces,* $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ *es un subespacio de* $\mathbb{V}$.

Demostración 1.2.17

1. *Sea* $v \in \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ *por la definición de suma, existen,* $s_1 \in \mathbb{S}_1$ *y* $s_2 \in \mathbb{S}_2$*, tal que,* $v = s_1 + s_2$*. De forma similar, si* $w \in \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ *entonces, existen,* $s_1' \in \mathbb{S}_1$ *y* $s_2' \in \mathbb{S}_2$*, tal que,* $w = s_1' + s_2'$*. Luego,* $v + w = (s_1 + s_2) + (s_1' + s_2') = \underbrace{(s_1 + s_1')}_{\in \mathbb{S}_1} + \underbrace{(s_2 + s_2')}_{\in \mathbb{S}_2}$.

   Por lo tanto, $v + w \in \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$.

2. *Sea* $v \in \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ *entonces,* $v = s_1 + s_2$ *con* $s_1 \in \mathbb{S}_1$ *y* $s_2 \in \mathbb{S}_2$*. Sea* $\lambda \in \mathbb{K}$ *luego,* $\lambda v = \lambda(s_1 + s_2) = \lambda s_1 + \lambda s_2$*, por lo tanto,* $\lambda v \in \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$*. Puesto que se cumplen 1) y 2) del Teorema 1.2.3,* $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ *resulta un subespacio de* $\mathbb{V}$.

□

Ejercicio 1.2.18 *Consideremos:*

$$\mathbb{S}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$$

$$\mathbb{S}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$$

Caracterizar $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ *e interpretar geométricamente.*

Definición 1.2.19 ***Suma Directa****.*
Sea $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y sean* $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2 \subseteq \mathbb{V}$ *subespacios de* $\mathbb{V}$*. Diremos que* $\mathbb{S}$ *es* ***suma directa*** *de* $\mathbb{S}_1$ *y* $\mathbb{S}_2$ *si cumple las siguientes propiedades:*

i) $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$

ii) $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$

En tal caso escribiremos:

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$$

1.3. Independencia Lineal

Definición 1.3.1 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *- espacio vectorial. Diremos que* $v \in \mathbb{V}$ *es* ***combinación lineal*** *de los vectores* $\{v_1, \cdots, v_m\}$ *si existen escalares* $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ *tales que,*

$$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$$

Observar que para que un vector sea combinación lineal de los vectores $\{v_1, \cdots, v_m\}$ el sistema debe ser compatible determinado.

Definición 1.3.2 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *- espacio vectorial. Un conjunto* $A = \{v_1, \cdots, v_r\}$ *es un* ***sistema de generadores*** *de* $\mathbb{V}$ *si y sólo si* $\forall v \in \mathbb{V}$*, existen escalares* $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ *tales que,*

$$v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \tag{1.1}$$

Es decir todo vector del espacio vectorial $\mathbb{V}$*, se escribe como combinación lineal de los elementos del conjunto A. En otras palabras para que existan los escalares* $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ *el sistema planteado en (1.1) es compatible cualquiera sea* $v \in \mathbb{V}$*.*

Ejemplo 1.3.3

1. *Sea* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ *entonces, el conjunto* $A = \{e_1, e_2\}$ *donde,*

$$e_1 = (1, 0), \; e_2 = (0, 1)$$

es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$*.*

2. *Sea* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ *entonces, el conjunto* $A = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ *donde,*

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^{2\times 2}$*.*

3. *Sea* $\mathbb{V} = \mathbb{P}_2 = \{p : p \text{ es polinomio a coeficientes reales de grado menor o igual que } 2\}$ *entonces, el conjunto*
$$A = \{1,\ x,\ x^2\}$$
es un sistema de generadores de $\mathbb{P}_2$.

4. *Sea* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ *y sea el conjunto* $A = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. *El conjunto A no constituye un sistema de generadores de* $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Definición 1.3.4 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *- espacio vectorial. Diremos que el conjunto* $A = \{v_1, \cdots, v_r\}$ *es* ***linealmente independiente*** *si se cumple:*

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow \alpha_i = 0,\ 1 \leq i \leq r \tag{1.2}$$

Es decir la única forma de escribir el vector nulo del espacio vectorial $\mathbb{V}$*, como combinación lineal de los elementos de A, es con todos los escalares nulos. Esto se cumple si y sólo si el sistema planteado en (1.2) es compatible determinado.*

Ejemplo 1.3.5 *Sea el* $\mathbb{R}$ *- espacio vectorial* $\mathbb{V} = \{f : f \text{ es función derivable}\}$ *considerando la suma y el producto por un escalar usual. Sea* $A = \{cos(x), sen(x)\}$*, demostrar que este conjunto es linealmente independiente.*

Solución 1.3.6 *Sean* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$*, planteamos:*

$$\alpha_1 cos(x) + \alpha_2 sen(x) = 0 \tag{1.3}$$

esta última igualdad se debe cumplir cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$*. Para ver que* α_1 *y* α_2 *son idénticamente nulos, derivamos miembro a miembro la ecuación (1.3), de esta forma obtenemos:*

$$-\alpha_1 sen(x) + \alpha_2 cos(x) = 0$$

Luego, llegamos al sistema de dos ecuaciones con las incógnitas α_1 *y* α_2 *dado por:*

$$\begin{cases} \alpha_1 cos(x) + \alpha_2 sen(x) = 0 \\ -\alpha_1 sen(x) + \alpha_2 cos(x) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

La matriz asociada al sistema es, $M = \begin{pmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{pmatrix}$*, cuya inversa resulta:*

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} cos(x) & -sen(x) \\ sen(x) & cos(x) \end{pmatrix}$$

Puesto que el sistema 1.4 se expresa en la forma, $M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *se tiene,*

$$M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M^{-1} M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el sistema es compatible determinado, cuya única solución es $\alpha_1 = 0$ *y* $\alpha_2 = 0$*. Resulta entonces que,* $A = \{cos(x), sen(x)\}$*, es linealmente independiente.*

Ejercicio 1.3.7 *Probar que los conjuntos definidos en el ejemplo 1.3.3 son linealmente independientes.*

Definición 1.3.8 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *- espacio vectorial. Diremos que el conjunto* $A = \{v_1, \cdots, v_r\}$ *es* ***linealmente dependiente*** *si no es linealmente independiente.*

1.3.1. Propiedades

Proposición 1.3.9 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial y sea $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una familia de vectores linealmente independiente. Si v es combinación lineal de los elementos de A entonces, la combinación lineal es única.*

Demostración 1.3.10 *Puesto que v es combinación lineal de los elementos de A entonces, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Supongamos que el vector v también se escribe en la forma $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ luego,*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i = 0_{\mathbb{V}}$$

Al ser A linealmente independiente tenemos que,

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$$

con lo cual la combinación lineal es única. $\square$

Proposición 1.3.11 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial y sea $A = \{u\}$ con $u \neq 0_{\mathbb{V}}$ entonces, A es linealmente independiente.*

Demostración 1.3.12 *Sea $\alpha u = 0_{\mathbb{V}}$, si se supone que, $\alpha \neq 0$ entonces, existe α^{-1} y por lo tanto,*

$$\alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1} 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$$

Absurdo. Así resulta, $\alpha = 0$ y entonces A es linealmente independiente. $\square$

Proposición 1.3.13 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial y sea $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ un conjunto finito y no vacío. A es linealmente dependiente si y sólo si algún vector de A se escribe como combinación lineal de los otros vectores del conjunto A.*

Demostración 1.3.14 $\Rightarrow$) *Puesto que $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es linealmente dependiente entonces, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ no todos nulos, tales que,*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_j v_j + \cdots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{V}}$$

supongamos que $\alpha_j \neq 0$ entonces,

$$v_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} (-\frac{\alpha_i}{\alpha_j}) v_i$$

$\Leftarrow$) *Puesto que un cierto v_j se escribe como combinación lineal de los restantes vectores de A, se tiene,*

$$v_j = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \lambda_i v_i \Leftrightarrow v_j + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} (-\lambda_i) v_i = 0_{\mathbb{V}}$$

lo cual dice que el conjunto A es linealmente dependiente. $\square$

Ejemplo 1.3.15 *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{P}_2 = \{p : p$ es polinomio de grado menor o igual que $2\}$ entonces, el conjunto*

$$A = \{1 + 2x,\ -1 + 3x^2,\ -3x^2 - 2x\}$$

es linealmente dependiente pues,

$$(1).(1 + 2x) + (1).(-1 + 3x^2) + (1).(-3x^2 - 2x) = 0_{\mathbb{P}_2}$$

de la última igualdad podemos despejar por ejemplo:

$$-3x^2 - 2x = (-1).(1 + 2x) + (-1).(-1 + 3x^2)$$

con lo cual el vector $-3x^2 - 2x$ se escribe como combinación lineal del resto de los vectores del conjunto A.

Proposición 1.3.16 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial y sea $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ un sistema de generadores de $\mathbb{V}$, linealmente dependiente. Entonces, existe un vector $v_j \in A$ tal que el conjunto $A - \{v_j\}$ es sistema de generadores de $\mathbb{V}$.*

Demostración 1.3.17 *Puesto que A es linealmente dependiente entonces por la Proposición 1.3.13, existe un vector $v_j \in A$ que se escribe como combinación lineal de los restantes elementos de A, es decir $v_j = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \beta_i v_i$. Por hipótesis, al ser $A = \{v_1, \cdots, v_n\}$ un sistema de generadores de $\mathbb{V}$, cualquiera se sea $v \in \mathbb{V}$, se escribe como combinación lineal de los elementos de A, esto es,*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_j v_j + \cdots + \alpha_n v_n \tag{1.5}$$

Reemplazando en la expresión (1.5) a v_j por $\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \beta_i v_i$ y asociando los términos homólogos, se tiene,

$$v = (\alpha_1 + \alpha_j \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_{j-1} + \alpha_j \beta_{j-1})v_{j-1} + (\alpha_{j+1} + \alpha_j \beta_{j+1})v_{j+1} \cdots + (\alpha_n + \alpha_j \beta_n)v_n$$

En esta última expresión el vector v está escrito como combinación lineal de

$$\{v_1, \cdots, v_{j-1}, v_{j+1}, \cdots, v_n\}$$

en este conjunto no aparece v_j es decir que el conjunto $A - \{v_j\}$ es sistema de generadores de $\mathbb{V}$. $\square$

1.4. Base y Dimensión

En esta sección vamos a estudiar ciertos conjuntos de un espacio vectorial finitamente generado. Estos conjuntos de vectores tienen la particularidad de que cualquier vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de los elementos de dicho conjunto. Además la combinación lineal hallada para cada vector es única.

1.4.1. Base de un espacio vectorial

Definición 1.4.1 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial. Un conjunto $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una **Base** del espacio vectorial $\mathbb{V}$, si sólo si, B es un sistema de generadores de $\mathbb{V}$ y B es linealmente independiente.*

Observación 1.4.2 *El conjunto de n-vectores $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ se considera* ordenado *es decir que si se cambia el orden de los elementos de B se obtiene otra base se $\mathbb{V}$.*

Ejemplo 1.4.3

1. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ entonces, el conjunto $B = E_n = \{e_1, \cdots, e_n\}$ donde, $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ es el vector de $\mathbb{R}^n$ que en la i-ésima posición tiene un 1 y en las restantes posiciones tiene ceros, resulta una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Al conjunto E_n se lo denomina la **Base Canónica** de $\mathbb{R}^n$.*

2. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ entonces, el conjunto $B = E_{2\times 2} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ donde,*

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   *es una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. A $E_{2\times 2}$ se la llama la **Base Canónica** de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.*

3. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{P}_n = \{p : p \text{ es polinomio a coeficientes reales de grado menor o igual que } n\}$ entonces, el conjunto*

$$B = \{1,\ x,\ x^2, \cdots,\ x^n\}$$

   es una base de $\mathbb{P}_n$.

Ejercicio 1.4.4 *Probar que los conjuntos definidos en el ejemplo 1.4.3 son bases de los respectivos espacios.*

Observación 1.4.5 ***Base de un subespacio**:*
Dado $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial y $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio de $\mathbb{V}$. Puesto que, por definición $\mathbb{S}$ es en sí mismo un espacio vectorial entonces, podemos hablar de base de este espacio vectorial en el sentido de la Definición 1.4.1.

El siguiente ejemplo muestra como hallar una base de un subespacio definido por un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 1.4.6 *Sea $\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3,\ 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$, se pide:*

a) Probar que $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$

b) Hallar una base del subespacio $\mathbb{S}$

Solución 1.4.7

a) Se deja como ejercicio.

b) Para hallar una base del subespacio $\mathbb{S}$ debemos encontrar un conjunto $B_{\mathbb{S}}$ que sea un sistema de generadores de $\mathbb{S}$ y que además resulte linealmente independiente. Para ello notemos que por la definición de los elementos de $\mathbb{S}$ se cumple que,

$$v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 \\ 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

de donde se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x_3 = x_1 + x_2 \\ x_4 = 2x_1 + 7x_2 \end{cases}$$

Luego,

$$v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S} \Leftrightarrow v = x_1(1,0,1,2) + x_2(0,1,1,7)$$

Esto nos dice que, $\mathbb{S} = gen\{(1,0,1,2),\ (0,1,1,7)\}$. *Se deja como ejercicio probar que el conjunto* $\{(1,0,1,2),\ (0,1,1,7)\}$ *es linealmente independiente. Por lo tanto* $B_{\mathbb{S}} = \{(1,0,1,2),\ (0,1,1,7)\}$ *es una base del subespacio* $\mathbb{S}$.

Teorema 1.4.8 ***(de extensión a una base)*** *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y sea* $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *una base de* $\mathbb{V}$. *Sea* $\{w_1, \cdots, w_m\}$ *un conjunto linealmente independiente que no es sistema de generadores de* $\mathbb{V}$ *entonces, existen* $\{w_{m+1}, \cdots, w_{m+p}\}$, *tales que,*

$$\{w_1, \cdots, w_m, w_{m+1}, \cdots, w_{m+p}\}$$

es una base para el espacio vectorial $\mathbb{V}$.

Demostración 1.4.9 *Consideremos el conjunto* $\mathcal{A} = \{w_1, \cdots, w_m, v_1, \cdots, v_n\}$. *El conjunto* $\mathcal{A}$ *es linealmente dependiente y además sistema de generadores de* $\mathbb{V}$. *Por la Proposición 1.3.16 existe* v_{j_1} *tal que, el conjunto* $\mathcal{A} - \{v_{j_1}\}$ *es sistema de generadores de* $\mathbb{V}$. *Si* $\mathcal{A} - \{v_{j_1}\}$ *resulta un conjunto linealmente independiente entonces* $\mathcal{A} - \{v_{j_1}\} = \{w_1, \cdots, w_m, \cdots, v_1, \cdots, \widehat{v_{j_1}}, \cdots, v_n\}$ *es base de* $\mathbb{V}$ *y* $w_{m+i} = v_i$, $1 \leq i \leq n$, $i \neq j_1$. *Si* $\mathcal{A} - \{v_{j_1}\}$ *es linealmente dependiente entonces, se repite el proceso, hasta que en un número de pasos p obtenemos,* $B' = \{w_1, \cdots, w_m, w_{m+1}, \cdots, w_{m+p}\}$ *que resulta una base* $\mathbb{V}$ $\square$

Proposición 1.4.10 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y sea* $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *una base de* $\mathbb{V}$. *Sea* $\{w_1, \cdots, w_m\}$ *un conjunto linealmente independiente entonces,* $m \leq n$

Demostración 1.4.11 *Por ser* $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *base de* $\mathbb{V}$, *los vectores* w_j *se escriben como combinación lineal de los elementos de la base* B

$$\begin{gathered} w_1 = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \cdots + \alpha_{n1}v_n \\ w_2 = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \cdots + \alpha_{n2}v_n \\ \vdots \\ w_m = \alpha_{1m}v_1 + \alpha_{2m}v_2 + \cdots + \alpha_{nm}v_n \end{gathered}$$

Se sabe que $\{w_1, \cdots, w_m\}$ *es linealmente independiente, por lo tanto el sistema:*

$$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_m w_m = 0_{\mathbb{V}} \tag{1.6}$$

tiene única solución $\beta_j = 0$, $j = 1, \cdots, m$. *Al sistema 1.6 lo podemos explicitar de la siguiente forma. Reemplazamos por cada* $w_j = \alpha_{1j}v_1 + \alpha_{2j}v_2 + \cdots + \alpha_{nj}v_n$ *en la expresión 1.6 y se llega a,*

$$(\alpha_{11}\beta_1 + \cdots + \alpha_{1m}\beta_m)v_1 + \cdots + (\alpha_{n1}\beta_1 + \cdots + \alpha_{nm}\beta_m)v_n = 0_{\mathbb{V}}$$

Como $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *es linealmente independiente, se concluye que los escalares que acompañan a los* v_i, *deben ser cero. De esta forma nos queda planteado:*

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\beta_1 + \cdots + \alpha_{1m}\beta_m &= 0 \\ &\vdots \\ \alpha_{n1}\beta_1 + \cdots + \alpha_{nm}\beta_m &= 0 \end{aligned}$$

Para que este sistema sea compatible determinado (no puede tener más incógnitas que ecuaciones), se debe satisfacer que, $m \leq n$ $\square$

Proposición 1.4.12 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $B_1 = \{u_1, \cdots, u_n\}$, $B_2 = \{w_1, \cdots, w_m\}$, bases de $\mathbb{V}$ entonces, $n = m$*

Demostración 1.4.13 *Como B_2 es linealmente independiente y B_1 base, entonces por la proposición anterior debe ser $m \leq n$. Razonando en forma análoga como B_1 es linealmente independiente y B_2 base entonces, $n \leq m$. Por ser $m \leq n$ y $n \leq m$ se concluye que, $n = m$* $\square$

Observación 1.4.14 *La Proposición 1.4.12 nos dice que el número de elementos de una base, no varía cuando se consideran distintas bases del mismo espacio vectorial. Esto nos lleva a la siguiente definición.*

1.4.2. Dimensión de un espacio vectorial

Definición 1.4.15 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial, la* ***dimensión*** *$\mathbb{V}$ es el cardinal de cualquiera de sus bases.*

Observación 1.4.16 *Si $\mathbb{V}$ es $\mathbb{K}$-espacio vectorial denotaremos con $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ a la dimensión del espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. En estas notas nos restringiremos al caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y por lo tanto escribiremos $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{V})$.*

Observación 1.4.17 *Sea $\mathbb{V}$ es $\mathbb{R}$-espacio vectorial y supongamos que $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$, definimos su dimensión como el cardinal de cualquiera de sus bases y escribimos $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}) = dim(\mathbb{S})$.*

Ejemplo 1.4.18

1. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ entonces, $dim(\mathbb{R}^n) = n$.*
2. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 2}$ entonces, $dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$.*
3. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{P}_n = \{p : p \text{ es polinomio de grado} \leq n\}$ entonces, $dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$.*
4. *Para el subespacio definido en el ejemplo 1.4.6,*

$$\mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3,\ 5x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$$

Vimos que,

$$B_{\mathbb{S}} = \{(1, 0, 1, 2),\ (0, 1, 1, 7)\}$$

es una base del subespacio $\mathbb{S}$ luego, $dim(\mathbb{S}) = 2$.

Proposición 1.4.19 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$ entonces, se cumple que:*

a) Si $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es un conjunto de n vectores de $\mathbb{V}$ linealmente independiente entonces, B es una base de $\mathbb{V}$.

b) Si $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es un conjunto de n vectores que generan $\mathbb{V}$ entonces, B es una base de $\mathbb{V}$.

Demostración 1.4.20 *a) Si el conjunto $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ no fuera un sistema de generadores de $\mathbb{V}$, puesto que B, por hipótesis es linealmente independiente, podemos extenderlo a una base de $\mathbb{V}$ digamos, $B' = \{v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}, \cdots, v_{n+k}\}$, pero entonces resultaría $n + k > n$ lo cual no puede ser pues $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = n$. Con lo cual $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ resulta una base de $\mathbb{V}$.*

b) Si el conjunto $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ fuera linealmente dependiente entonces, existe $v_{j_1} \in B$ tal que, $B - \{v_{j_1}\}$ es sistema de generadores de $\mathbb{V}$, si pasara que el conjunto $B - \{v_{j_1}\}$ no fuera linealmente independiente, se repite el proceso hasta obtener un conjunto $B' = B - \{v_{j_1}, \cdots, v_{j_k}\}$ que resulte linealmente independiente,y como es sistema de generadores de $\mathbb{V}$ el conjunto B' resultaría base de $\mathbb{V}$ y de esta forma $cardinal(B') < n = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$, absurdo. Luego, $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es linealmente independiente y por lo tanto una base de $\mathbb{V}$. $\square$

Observación 1.4.21 *La proposición 1.4.19 nos dice que conociendo la dimensión del espacio vectorial, resulta más rápida la búsqueda de una base del espacio pues, dado un conjunto de n-vectores basta con ver si es sistema de generadores del espacio o bien ver si es linealmente independiente. Esto es, si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial tal que, $dim(\mathbb{V}) = n$ entonces,*

i) Un conjunto de n-vectores linealmente independientes es base de $\mathbb{V}$.

ii) Un conjunto n-vectores que generan a $\mathbb{V}$ es base de $\mathbb{V}$.

iii) Todo conjunto con más de n-vectores en un espacio vectorial tal que, $dim(\mathbb{V}) = n$, es linealmente dependiente.

Ejemplo 1.4.22 *1. Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ entonces, el conjunto $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ es linealmente independiente por lo tanto es base de $\mathbb{R}^2$.*

2. Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, el conjunto $A = \{(1, 1), (0, 1), (1, -1)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$, pero por la Proposición 1.4.19, el conjunto A es linealmente dependiente pues, $Card(A) = 3$. Como A es sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$ podemos extraer una base desde el conjunto A. El conjunto $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$ es sistema de generadores de $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto base.

Proposición 1.4.23 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $dim(\mathbb{V}) = n$ y sea $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ con $dim(\mathbb{V}) = n = dim(\mathbb{W})$ entonces, $\mathbb{W} = \mathbb{V}$*

Demostración 1.4.24 *1) Si $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W}) = 0$ entonces, $\mathbb{W} = \mathbb{V} = \{0_{\mathbb{V}}\}$.*

2) Si $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W}) = n > 0$, sea $B = \{w_1, \cdots, w_n\}$ una base de $\mathbb{W}$, como el conjunto B son n-vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión n luego, B también es base de $\mathbb{V}$. Si tomamos un vector arbitrario $v \in \mathbb{V}$ entonces, por ser $B = \{w_1, \cdots, w_n\}$ base de $\mathbb{V}$, el vector v se escribe en la forma:

$$v = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \in \mathbb{W}$$

Luego $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{W}$, como además se cumple $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ entonces, $\mathbb{W} = \mathbb{V}$. $\square$

1.4.3. Dimensión del subespacio suma

Recordemos que dados $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ dos subespacios del espacio vectorial $\mathbb{V}$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, se define el subespacio suma como:

$$\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 = \{v \in \mathbb{V} : v = s_1 + s_2,\ s_i \in \mathbb{S}_i,\ i = 1, 2\}$$

El siguiente teorema muestra como se relacionan las dimensiones de cada subespacio con la dimensión del subespacio suma.

Teorema 1.4.25 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $dim(\mathbb{V}) = n$. Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ dos subespacios de $\mathbb{V}$ entonces,*

$$dim(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) = dim\mathbb{S}_1 + dim\mathbb{S}_2 - dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2)$$

Demostración 1.4.26 *a) Supongamos que $\mathbb{S}_1 \neq \{0_\mathbb{V}\} \neq \mathbb{S}_2$ y que $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 \neq \{0_\mathbb{V}\}$, por lo tanto, $dim\mathbb{S}_1 = n_1 > 0$, $dim\mathbb{S}_2 = n_2 > 0$ y $dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2) = p > 0$. Sea B una base del subespacio intersección $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$,*

$$B = \{v_1, \cdots, v_p\}$$

Puesto que B es linealmente independiente se puede extender a una base de $\mathbb{S}_1$, sea $B_1 = \{v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_{n_1-p}\}$ una base de $\mathbb{S}_1$.
De forma análoga sea, $B_2 = \{v_1, \cdots, v_p, z_1, \cdots, z_{n_2-p}\}$ una base de $\mathbb{S}_2$. Se afirma que,

$$B_{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2} = \{v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_{n_1-p}, z_1, \cdots, z_{n_2-p}\}$$

es una base de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$. Para ver esto hay que probar que $B_{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2}$ es sistema de generadores y linealmente independiete.

i) Veamos que $B_{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2}$ es sistema de generadores de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$. Para ello sea v un vector arbitrario de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ entonces, $v = s_1 + s_2$, $s_i \in \mathbb{S}_i$, $i = 1, 2$. Puesto que $s_1 \in \mathbb{S}_1$ entonces, s_1 se escribe como combinación lineal de los elementos de $B_1 = \{v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_{n_1-p}\}$, esto es,

$$s_1 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n_1-p} w_{n_1-p}$$

De forma similar el vector s_2 se escribe como combinación lineal de los elementos de B_2 en la forma:

$$s_2 = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_p v_p + \delta_1 z_1 + \cdots + \delta_{n_2-p} z_{n_2-p}$$

Por lo tanto v se escribe como,

$$v = (\alpha_1 + \gamma_1)v_1 + \cdots + (\alpha_p + \gamma_p)v_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n_1-p} w_{n_1-p} + \delta_1 z_1 + \cdots + \delta_{n_2-p} z_{n_2-p}$$

Es decir $B_{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2}$ es sistema de generadores de $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$.

ii) Probaremos ahora que $B_{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2}$ es linealmente independiente. Para ver esto planteamos:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n_1-p} w_{n_1-p} + \delta_1 z_1 + \cdots + \delta_{n_2-p} z_{n_2-p} = 0_\mathbb{V}$$

Esta última identidad nos dice que,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n_1-p} w_{n_1-p} = (-\delta_1)z_1 + \cdots + (-\delta_{n_2-p})z_{n_2-p} \quad (1.7)$$

Si se designa por $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n_1-p} w_{n_1-p}$ *se observa que* $u \in \mathbb{S}_1$, *por ser combinación lineal de los elementos de* B_1. *Se puede observar que el vector* u *también, se escribe en la forma,* $u = (-\delta_1)z_1 + \cdots + (-\delta_{n_2-p})z_{n_2-p}$ *y por lo tanto* $u \in \mathbb{S}_2$. *Como* u *pertenece tanto a* $\mathbb{S}_1$ *como a* $\mathbb{S}_2$ *entonces,* $u \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ *es decir que el vector* $u = (-\delta_1)z_1 + \cdots + (-\delta_{n_2-p})z_{n_2-p}$ *se escibe como combinación lineal de los elementos de la base de la intersección,* $B = \{v_1, \cdots, v_p\}$ *es decir,*

$$u = (-\delta_1)z_1 + \cdots + (-\delta_{n_2-p})z_{n_2-p} = \eta_1 v_1 + \cdots + \eta_p v_p$$

de donde obtenemos:

$$\delta_1 z_1 + \cdots + \delta_{n_2-p} z_{n_2-p} + \eta_1 v_1 + \cdots + \eta_p v_p = 0_{\mathbb{V}}$$

Puesto que $B_2 = \{v_1, \cdots, v_p, z_1, \cdots, z_{n_2-p}\}$ *es linealmente independiente entonces,*

$$\delta_i = 0, \quad i = 1, \cdots, n_2 - p \ y \quad \eta_j = 0, \quad j = 1, \cdots, p$$

Si se reemplaza por $\delta_i = 0, \ i = 1, \cdots, n_2 - p$ *en la ecuación (1.7), se obtiene,*

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n_1-p} w_{n_1-p} = 0_{\mathbb{V}}$$

Y puesto que $B_1 = \{v_1, \cdots, v_p, w_1, \cdots, w_{n_1-p}\}$ *es linealmente independiente se concluye que,*

$$\lambda_i = 0, \quad i = 1, \cdots, p \ y \quad \beta_j = 0, \quad j = 1, \cdots, n_1 - p$$

Luego $B_{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2}$ *es linealmente independiente.*

iii) Por i) y ii) $B_{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2}$ *es base para el subespacio* $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ *cuyo número de elementos es,*

$$Card(B_{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2}) = p + (n_1 - p) + (n_2 - p) = n_1 + n_2 - p$$

Lo cual dice que,

$$dim(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) = dim\mathbb{S}_1 + dim\mathbb{S}_2 - dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2)$$

b) Se deja como ejercicio el caso $\mathbb{S}_1 \neq \{0_{\mathbb{V}}\} \neq \mathbb{S}_2$ *y* $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$ $\square$

Nota: Es importante observar que la parte a) del Teorema 1.4.25 nos enseña como **hallar una base del subespacio suma que contenga una base del subespacio intersección**. Para ello se halla primero una base de la intersección. Una vez obtenida dicha base se completa a una base del primer subespacio, de manera similar a la base del subespacio intersección se la completa a una base del segundo subespacio. Finalmente se considera el conjunto en el cual tenemos los elementos de la base del primer subespacio y completamos con los elementos de la base del segundo subespacio sin repetir los elementos que son base de la intersección.

Corolario 1.4.27 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial con* $dim(\mathbb{V}) = n$. *Sean* $\mathbb{S}_1$ *y* $\mathbb{S}_2$ *dos subespacios de* $\mathbb{V}$ *entonces,*

$$dim(\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2) = dim\mathbb{S}_1 + dim\mathbb{S}_2$$

Demostración 1.4.28 *Es la parte b) del Teorema 1.4.25* $\square$

Ejemplo 1.4.29 *Sea* $\mathbb{V} = \mathbb{P}_2$, *consideremos los subespacios de* $\mathbb{P}_2$ *definidos por:*

$$\mathbb{S}_1 = \{p \in \mathbb{V} : p = ax^2 + bx + c, \ a - b + c = 0\}$$
$$\mathbb{S}_2 = gen\{3, \ 2x + 1\}$$

Se pide:

a) *Hallar una base de* $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$

b) *Hallar una base de* $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$ *que contenga una base de la intersección.*

c) *Verificar que se cumple:* $dim(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) = dim\mathbb{S}_1 + dim\mathbb{S}_2 - dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2)$

Solución 1.4.30 a) *Consideremos* $p \in \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$. *Por estar* p *en* $\mathbb{S}_1$ *se cumple:* $p = ax^2 + bx + c,\ a - b + c = 0$ *o equivalentemente* $p = ax^2 + (a+c)x + c$. *Puesto que* p *también está en* $\mathbb{S}_2$ *verifica:* $p = 3\alpha + \beta(2x+1) = 2\beta x + (3\alpha + \beta)$ *es decir,*

$$\begin{cases} p = ax^2 + (a+c)x + c \\ p = 2\beta x + (3\alpha + \beta) \end{cases}$$

de donde obtenemos:

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + c = 2\beta \\ c = 3\alpha + \beta \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} a = 0 \\ c = 2\beta \\ \beta = 3\alpha \end{cases}$$

Reemplazando a β *por* 3α *en* $p = 2\beta x + (3\alpha + \beta)$ *se obtiene,* $p = 6\alpha x + 6\alpha = 6\alpha(x+1)$ *es decir que,*

$$\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = gen\{x + 1\}$$

Observar que se obtendría el mismo resultado si se reemplazara por $c = 2\beta$ *y* $a = 0$ *en* $p = ax^2 + (a+c)x + c$, *esto es,* $p = 0x^2 + (0 + 2\beta)x + 2\beta = 2\beta(x+1)$.
Además tenemos que una base para la intersección es $B_{\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2} = \{x + 1\}$ *y esto nos dice que,*

$$dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2) = 1$$

b) *Sabemos por la parte a) que una base para la intersección es,* $B_{\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2} = \{x + 1\}$, *para completar este conjunto a una base de* $\mathbb{S}_1$, *veamos primero cuáles son los generadores de* $\mathbb{S}_1$. *Para ello recordemos que* $p \in \mathbb{S}_1 \Leftrightarrow p = ax^2 + (a+c)x + c$ *es decir,* $p = ax^2 + (a+c)x + c = a(x^2 + x) + c(x+1)$ *por lo tanto,*

$$\mathbb{S}_1 = gen\{x^2 + x,\ x + 1\}$$

Se deja como ejercicio probar que el conjunto $\{x^2 + x,\ x + 1\}$ *es linealmente independiente. Luego* $B_{\mathbb{S}_1} = \{x^2 + x,\ x + 1\}$ *es base de* $\mathbb{S}_1$ *que extiende la base de la intersección. Es de notar que,* $dim(\mathbb{S}_1) = 2$.
Sabemos que $\mathbb{S}_2 = gen\{3,\ 2x + 1\}$ *y observando que,*

$$2x + 1 = (-\frac{1}{3})3 + 2(x+1)$$

esto nos dice que $\mathbb{S}_2 = gen\{3,\ 2x+1\} = gen\{3,\ x+1\}$. *Se deja como ejercicio ver que* $\{3,\ x+1\}$ *es linealmente independiente, de esta forma resulta,* $B_{\mathbb{S}_2} = \{3,\ x+1\}$ *una base para* $\mathbb{S}_2$ *de donde deducimos que ,* $dim(\mathbb{S}_2) = 2$.
Se deja como ejercicio probar que una base del subespacio suma (que contiene una base de la intersección) es,

$$B_{\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2} = \{x^2 + x,\ x + 1,\ 3\}$$

de esto se deduce que la dimensión del subespacio suma es, $dim(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) = 3$

c) *En los items a) y b) vimos que,* $dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2) = 1$, $dim(\mathbb{S}_1) = 2$ *y* $dim(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) = 3$. *Por lo tanto,*

$$3 = dim(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) = 2 + 2 - 1 = dim(\mathbb{S}_1) + dim(\mathbb{S}_2) - dim(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2)$$

Verificándose la tesis del Teorema 1.4.25.

Ejercicio 1.4.31 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial,* $dim(\mathbb{V}) = 4$ *y sea* $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *base de* $\mathbb{V}$. *Consideremos los subespacios de* $\mathbb{V}$ *definidos por:*

$$\mathbb{W}_1 = gen\{v_1 + v_2, v_3 + v_4\}$$

$$\mathbb{W}_2 = gen\{v_1 - v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$$

Se pide:

a) *Hallar* $dim(\mathbb{W}_1)$ *y* $dim(\mathbb{W}_2)$

b) *Hallar una base de* $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ *en términos de los elementos de la base* $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

c) *Calcular* $dim(\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2)$

d) *Descomponer el vector* $u = 3v_1 + 2v_3 + v_4$ *como,* $u = w_1 + w_2$ *donde,* $w_1 \in \mathbb{W}_1$ *y* $w_2 \in \mathbb{W}_2$

1.5. Cambio de base

1.5.1. Coordenadas

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, $dim(\mathbb{V}) = n$ y sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Sabemos que dado $v \in \mathbb{V}$, existen *únicos escalares* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tales que satisfacen,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Como esta forma de escribir al vector v como combinación lineal de los vectores de $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es única, a las $\alpha_i, i = 1, \cdots, n$ se las llama **coordenadas del vector** v, **respecto a la base** B y se denota por:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Observación 1.5.1 1. *Es de notar que independientemente de la naturaleza de* v *siempre el* ***vector coordenadas*** *es un vector que pertenece a* $\mathbb{R}^{n\times 1}$, *es decir,* $[v]_B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

2. *Si se cambia la base (respecto a la cual tomamos coordenadas) entonces, las coordenadas del vector cambian.*

Ejemplo 1.5.2 *Sea* $\mathbb{V} = \mathbb{P}_2$ *y* $B = \{2,\ 3 + x,\ 1 + x^2\}$ *una base de* $\mathbb{V}$. *Se desea determinar las coordenadas de* $p = 2 + x + x^2$ *respecto a la base* B.
Para poder encontrar las coordenadas de p *respecto a* B *planteamos,*

$$p = 2 + x + x^2 = \alpha_1(2) + \alpha_2(3 + x) + \alpha_3(1 + x^2)$$

de donde,

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

Entonces,

$$[p]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles son las coordenadas de p respecto a la base $B' = \{1,\ x,\ x^2\}$ *?*

1.5.2. Matriz de cambio de base

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, $dim(\mathbb{V}) = n$ y sean $B_1 = \{u_1, \cdots, u_n\}$, $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ bases de $\mathbb{V}$. Sea $v \in \mathbb{V}$ y supongamos que al tomar coordenadas respecto a B_1 y B_2 obtenemos,

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad y \quad [v]_{B_2} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Nos preguntamos: ¿Qué relación existe entre $[v]_{B_1}$ y $[v]_{B_2}$?. La respuesta la encontramos a continuación:

Teorema 1.5.3 ***(Matriz cambio de base)*** *Sean* $B_1 = \{u_1, \cdots, u_n\}$*,* $B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *bases del* $\mathbb{R}$ *- espacio vectorial* $\mathbb{V}$*,* $dim(\mathbb{V}) = n$*. Cualquiera sea* $v \in \mathbb{V}$*, existe una única matriz invertible* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que,*

$$[v]_{B_2} = P[v]_{B_1} \quad y \quad [v]_{B_1} = P^{-1}[v]_{B_2}$$

Demostración 1.5.4 *Sea* $v \in \mathbb{V}$ *y supongamos que,*

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad y \quad [v]_{B_2} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Esto nos dice que el vector v se escribe en la forma,

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \tag{1.8}$$

y también v se escribe como,

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \tag{1.9}$$

Ahora bien igualando las identidades (1.8) y (1.9) se tiene,

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \tag{1.10}$$

Supongamos por ahora que los escalares $\beta_i,\ i = 1, \cdots, n$ *de (1.9) están dados (son datos) y que queremos determinar los escalares* $\alpha_i,\ i = 1, \cdots, n$ *de (1.8). Para ello escribimos los vectores*

$u_j,\ j=1,\cdots,n$ como combinación lineal de los vectores de la base B_2, esto es,

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n \\ &\vdots \\ u_j &= a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n \\ &\vdots \\ u_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n \end{aligned} \tag{1.11}$$

Reemplazando en la igualdad (1.10) por las relaciones (1.11) y agrupando convenientemente se llega a:

$$\begin{aligned} \beta_1v_1 + \beta_2v_2 + \cdots + \beta_nv_n = \quad & (\alpha_1a_{11} + \alpha_2a_{12} + \cdots + \alpha_na_{1n})v_1 \\ & +(\alpha_1a_{21} + \alpha_2a_{22} + \cdots + \alpha_na_{2n})v_2 \\ & \vdots \\ & +(\alpha_1a_{n1} + \alpha_2a_{n2} + \cdots + \alpha_na_{nn})v_n \end{aligned} \tag{1.12}$$

Es de observar que por ser B_2 una base y por la Proposición 1.3.9, los escalres $\beta_i, i=1,\cdots,n$ son únicos con lo cual se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \beta_1 = \quad & \alpha_1a_{11} + \alpha_2a_{12} + \cdots + \alpha_na_{1n} \\ \beta_2 = \quad & \alpha_1a_{21} + \alpha_2a_{22} + \cdots + \alpha_na_{2n} \\ \vdots \quad & \quad\quad\quad \vdots \\ \beta_n = \quad & \alpha_1a_{n1} + \alpha_2a_{n2} + \cdots + \alpha_na_{nn} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Cuya expresión matricial es:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Ahora bien el sistema (1.14) (cuyas incógnitas son las α_i) tiene única solución si y sólo si, su matriz asociada es invertible. Que tiene solución única esta asegurado por la Proposición 1.3.9, por lo tanto su matriz asociada es invertible. Llamando P a la matriz,

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se tiene que el sistema (1.14) se escribe en la forma, $[v]_{B_2} = P[v]_{B_1}$ y puesto que P es invertible tenemos:

$$[v]_{B_1} = P^{-1}[v]_{B_2}$$

La última identidad resuelve el problema cuando los escalares $\beta_i, i=1,\cdots,n$ de (1.9) son datos y que queremos determinar los escalares $\alpha_i,\ i=1,\cdots,n$ de (1.8).
En el caso que los $\alpha_i, i=1,\cdots,n$ de (1.8) están dados y que queremos determinar los escalares $\beta_i,\ i=1,\cdots,n$ de (1.9) utilizamos,

$$[v]_{B_2} = P[v]_{B_1}$$

□

Notación y Nombre: A la matriz P del Teorema 4.3.4 se llama **Matriz cambio de la base B_1 a la base B_2** y la notamos por:

$$P = C(B_1, B_2)$$

Observemos que las columnas de la matriz $C(B_1, B_2)$ son los vectores coordenadas de los u_j, cuando se escriben como combinación lineal de los elementos de B_2, esto es, $[u_j]_{B_2}$.
La matriz P^{-1} es la matriz cambio de base de B_2 a B_1 esto es,

$$P^{-1} = C(B_2, B_1)$$

Por lo tanto,

$$C(B_2, B_1) = (C(B_1, B_2))^{-1}$$

Ejemplo 1.5.5 *Sean* $B_1 = \{u_1, u_2\} = \{(1,2),(1,-1)\}$, $B_2 = \{v_1, v_2\} = \{(1,-1),(1,1)\}$ *bases* $\mathbb{R}^2$ *se pide,*

1. *Hallar las coordenadas de* $v = (2,7)$ *con respecto a la base* B_1
2. *Hallar la matriz cambio de base de* B_1 *a* B_2
3. *¿Cuáles son las coordenadas de* $v = (2,7)$ *con respecto a la base* B_2 *?*

Solución 1.5.6

1. *Se deja como ejercicio ver que,* $v = (2,7)$ *con respecto a la base* B_1

$$v = (2,7) = 3u_1 + (-1)u_2$$

Por lo tanto,

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. *Para hallar la matriz cambio de base* $C(B_1, B_2)$, *hay que escribir los vectores de la base* B_1 *con combinación lineal de los vectores de la base* B_2, *planteamos:*

$$u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2$$

$$u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2$$

lo cual es equivalente a decir que,

$$[u_1]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad y \quad [u_2]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz buscada es,

$$C(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Se deja como ejercicio comprobar que,

$$C(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

3. *Por el Teorema de matriz cambio de base, se tiene,*

$$[v]_{B_2} = C(B_1, B_2)[v]_{B_1}$$

Entonces,

$$[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Se deja como ejercicio comprobar que efectivamente $[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$

Capítulo 2

Espacios con Producto Interno

Para dotar a un espacio vectorial de las nociones de distancia, ortogonalidad y ángulo, es necesario definir en el espacio vectorial, un producto interno. En esta sección se generaliza la definición dada de producto interno en $\mathbb{R}^n$. En lo que sigue se consideran espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

2.1. Producto Interno

2.1.1. Definiciones y ejemplos

Definición 2.1.1 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, la aplicación que a cada par de vectores $u, v \in \mathbb{V}$ le asigna un escalar $\langle u, v\rangle \in \mathbb{R}$ se la denomina **producto escalar** o **producto interno** en $\mathbb{V}$ si verifica:*

1. ***Bilinealidad*** $u_1, u_2, v_1, v_2, u, v \in \mathbb{V}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\langle \alpha u_1 + \beta u_2, v\rangle = \alpha\langle u_1, v\rangle + \beta\langle u_2, v\rangle$$

$$\langle u, \alpha v_1 + \beta v_2\rangle = \alpha\langle u, v_1\rangle + \beta\langle u, v_2\rangle$$

2. ***Simetría*** $u, v \in \mathbb{V}$

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$

3. ***Definido positivo*** $u \in \mathbb{V}$

$$\langle u, u\rangle \geq 0, \forall u \in \mathbb{V}$$

$$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$$

Ejemplo 2.1.2 1. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{n\times 1}$, $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Se define*

$$\langle u, v\rangle = u^t v = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

*Se deja como ejercicio comprobar que con esta definición, se verifican las propiedades de un producto interno. A este producto interno en $\mathbb{R}^{n\times 1}$ se lo denomina **producto interno canónico** de $\mathbb{R}^{n\times 1}$.*

2. *Sea* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 1}$, $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *y* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. *Se define*

$$\langle u, v\rangle = u^t A v = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$

Comprobemos que se verifican las propiedades de un producto interno.

a) ***Bilinealidad*** $u_1, u_2, v \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \langle \alpha u_1 + \beta u_2, v\rangle &\underbrace{=}_{Por\ def.} (\alpha u_1 + \beta u_2)^t A v \\ &= (\alpha (u_1)^t + \beta (u_2)^t) A v = (\alpha (u_1)^t A + \beta (u_2)^t A) v \\ &= \alpha (u_1)^t A v + \beta (u_2)^t A v \underbrace{=}_{Por\ def.} \alpha\langle u_1, v\rangle + \beta\langle u_2, v\rangle \end{aligned}$$

De esta forma llegamos a,

$$\langle \alpha u_1 + \beta u_2, v\rangle = \alpha\langle u_1, v\rangle + \beta\langle u_2, v\rangle$$

La simetría que probaremos en b) implica la linealidad en la segunda componente del producto.

b) ***Simetría*** $u, v \in \mathbb{V}$

$$\langle u, v\rangle \underbrace{=}_{Por\ def.} \underbrace{u^t A v}_{\in\mathbb{R}} = (u^t A v)^t = v^t A^t u \underbrace{=}_{A\ es\ sim.} v^t A u = \langle v, u\rangle$$

c) ***Definido positivo*** $u \in \mathbb{V}$ *veamos primero que,*

$$\langle u, u\rangle \geq 0, \forall u \in \mathbb{V}$$

Para ello, sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *entonces,*

$$\langle u, u\rangle = u^t A u = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \geq 0, \forall u \in \mathbb{V}$$

Veamos si se cumple

$$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$$

para ello, supongamos, $\langle u, u\rangle = 0$ *entonces,*

$$(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 = 0 \\ x_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0$$

Inversamente si suponemos que $u = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 0$ *luego,*

$$\langle u, u\rangle = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 = 0$$

Asi resulta $\langle u, v\rangle$ *un producto interno en* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 1}$

Puesto que si consideramos $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dotado con un producto interno, $\langle u, v\rangle$ entonces, por ser definido positivo se cumple, $\langle u, u\rangle \geq 0, \forall u \in \mathbb{V}$ y $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0_{\mathbb{V}}$ tienen sentido la siguiente definición:

Definición 2.1.3 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$ se define la **Longitud** o **Norma**, que denotaremos por, $\| \ \|$ como,*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Otra noción que aparece cuando al $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, $\mathbb{V}$, se lo dota de un producto interno es la noción de *perpendicularidad* u *ortogonalidad.*

Definición 2.1.4 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$ se dice que $u \in \mathbb{V}$ es **Ortogonal** a $v \in \mathbb{V}$ que denotaremos por $u \perp v$, si y sólo si,*

$$\langle u, v\rangle = 0$$

Ejemplo 2.1.5 *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2\times 1}$, $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Se define,*

$$\langle u, v\rangle_A = u^t A v = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$$

como en el ejemplo 2.1.2, se pide:

1. *Calcular la Norma de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respecto del producto $\langle , \ \rangle_A$ y respecto a la norma inducida por el producto interno canónico de $\mathbb{R}^{2\times 1}$ (denotado por $\langle , \ \rangle_{can}$) . Comparar los resultados.*

2. *Hallar todos los vectores $v \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ que son ortogonales a $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respecto del producto $\langle , \ \rangle_A$ y respecto al producto interno canónico de $\mathbb{R}^{2\times 1}$. Comparar los resultados.*

Solución 2.1.6 *1. Llamamos $\|u\|_A$ a la norma inducida por el producto interno $\langle , \ \rangle_A$, es decir, si $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ entonces,*

$$\|u\|_A = \sqrt{\langle u, u\rangle_A} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2}$$

Para nuestro caso $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ luego,

$$\|u\|_A = \sqrt{1^2 - 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

Respecto a la norma inducida por el producto interno canónico de $\mathbb{R}^{2\times 1}$ se tiene,

$$\|u\|_{can} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{can}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Por lo tanto,

$$\|u\|_{can} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Observar que: $\|u\|_A \neq \|u\|_{can}$

2. *Sabemos que si* $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *entonces,* $\langle u, v\rangle_A = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$
   Estamos buscando todos los vectores v *tales que son ortogonales a* $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *respecto del producto* $\langle , \rangle_A$ *por lo tanto* $\langle u, v\rangle_A = 0$ *si y sólo si,*

$$\langle u, v\rangle_A = 1 \cdot y_1 - 1 \cdot y_2 - 1 \cdot y_1 + 2 \cdot 1 \cdot y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = 0$$

   es decir, $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *es decir es le subespacio de* $\mathbb{R}^{2\times 1}$ *generado por el vector* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   Con respecto al producto interno canónico de $\mathbb{R}^{2\times 1}$ *se tiene,* $\langle u, v\rangle_{can} = x_1y_1 + x_2y_2$ *luego la condición de ortogonalidad queda escrita como,*

$$\langle u, v\rangle_{can} = 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 0 \Leftrightarrow y_2 = -y_1$$

   por lo tanto $\langle u, v\rangle_{can} = 0$ *si y sólo si,* $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *es decir es el subespacio de* $\mathbb{R}^{2\times 1}$ *generado por el vector* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Claramente la condición de ortogonalidad depende de la definición de producto interno que se tenga.*

Definición 2.1.7 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{R}$ *- espacio vectorial, dotado con un producto interno,* $\langle , \rangle$ *diremos que el vector* u *es* ***Unitario*** *si y sólo si,*

$$\|u\| = 1$$

Ejemplo 2.1.8 *Sea* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$ *dotado con el producto interno canónico,* $\langle , \rangle_{can} = \langle , \rangle$. *Se deja como ejercicio verificar que el vector* $u = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ *es un vector unitario en* $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 2.1.9 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{R}$ *- espacio vectorial, dotado con un producto interno,* $\langle , \rangle$ *y consideremos el vector* $v \neq 0_{\mathbb{V}}$. *Probar que el vector* $u = \frac{v}{\|v\|}$ *, es un vector unitario.*

2.1.2. Propiedades

Proposición 2.1.10 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{R}$ *- espacio vectorial, dotado con un producto interno,* $\langle , \rangle$. *Sea* $v \in \mathbb{V}$ *y* $c \in \mathbb{R}$ *entonces,* $\|cv\| = |c|\|v\|$

Demostración 2.1.11 *Sea* $v \in \mathbb{V}$ *y* $c \in \mathbb{R}$ *entonces,*

$$\|cv\| = \sqrt{\langle cv, cv\rangle} = \sqrt{c^2\langle v, v\rangle} = \sqrt{c^2}\sqrt{\langle v, v\rangle} = |c|\|v\|$$

□

Proposición 2.1.12 ***Teorema de Pitágoras***
Sea $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{R}$ *- espacio vectorial, dotado con un producto interno,* $\langle , \rangle$. *Sea* $u, v \in \mathbb{V}$ *ortogonales entonces,* $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Demostración 2.1.13

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \underbrace{=}_{u\perp v} \|u\|^2 + \|v\|^2$$

□

Proposición 2.1.14 ***Ley del paralelogramo***
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dotado con un producto interno, $\langle,\rangle$. Sea $u,v \in \mathbb{V}$ entonces,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

Demostración 2.1.15 *Se tiene por un lado,*

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \tag{2.1}$$

Y por otro

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \tag{2.2}$$

Sumando 2.1 y 2.2 obtenemos,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

□

2.1.3. Proyección ortogonal

Proposición 2.1.16 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dotado con un producto interno, $\langle,\rangle$. Sea $w \in \mathbb{V}$, $w \neq 0_{\mathbb{V}}$ entonces, cualquiera sea $v \in \mathbb{V}$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que, $v - cw \perp w$*

Demostración 2.1.17 *Se desea encontrar $c \in \mathbb{R}$ de forma tal que, $\langle v - cw, w\rangle = 0$ esto pasa si y sólo si,*

$$0 = \langle v - cw, w\rangle = \langle v,w\rangle - c\langle w,w\rangle \Leftrightarrow c = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$$

□

Definición 2.1.18 *Al vector cw se lo denomina la* ***proyección ortogonal*** *de v a lo largo de w y al vector $z = v - cw$ se lo llama la* ***componente*** *de v* ***ortogonal*** *a w*

Ejemplo 2.1.19 *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ dotado con el producto interno canónico. Sea $v = (3,-4)$ y $w = (1,1)$. Se quiere descomponer al vector v de forma tal que, $v = v_1 + v_2$ deonde, $v_1 \perp v_2$.*

Solución 2.1.20 *Por la Proposición 2.1.16 si se toma $c = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$ entonces,*

$$v = \underbrace{v - cw}_{v_1} + \underbrace{cw}_{v_2}$$

Calculemos c,

$$c = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle} = -\frac{1}{2}$$

Entonces,

$$v_1 = v - cw = \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right)$$

$$v_2 = cw = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

De esta forma,

$$v = \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Observar que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

En el siguiente Teorema se hace uso de la proyección ortogonal para demostrar una importante desigualdad.

Teorema 2.1.21 ***Desigualdad de Cauchy - Schwarz***
Sea $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{R}$ *- espacio vectorial, dotado con un producto interno,* $\langle , \rangle$*. Sea* $u, v \in \mathbb{V}$ *entonces,*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Demostración 2.1.22 *i) Si* $u = 0_{\mathbb{V}}$ *o* $v = 0_{\mathbb{V}}$ *se cumple la igualdad.*

ii) Si $u \neq 0_{\mathbb{V}}$ *y* $v \neq 0_{\mathbb{V}}$ *son linealmente dependientes entonces, existe* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ *tal que,* $u = \alpha v$*. Luego, por un lado se tiene,*

$$|\langle u, v \rangle| = |\langle \alpha v, v \rangle| = |\alpha| \|v\|^2$$

y por otro

$$\|u\| \|v\| = \|\alpha v\| \|v\| = |\alpha| \|v\|^2$$

y nuevamente vale la igualdad.

iii) Si $u \neq 0_{\mathbb{V}}$ *y* $v \neq 0_{\mathbb{V}}$ *son linealmente independientes entonces, si se toma* $c = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$*, sabemos que,* $u - cv \perp cv$*. Podemos descomponer a* u *en la forma:* $u = u - cv + cv$ *con* $u - cv \perp cv$*. Entonces,*

$$\|u\|^2 = \|(u - cv) + cv\|^2 \underbrace{=}_{Pitágoras} \|u - cv\|^2 + \|cv\|^2 \geq \|cv\|^2$$

esto es,

$$c^2 \|v\|^2 \leq \|u\|^2$$

Reemplazando por el valor de $c = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$*, se tiene,*

$$\left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}\right)^2 \|v\|^2 \leq \|u\|^2 \Leftrightarrow \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|v\|^2} \leq \|u\|^2 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2 \Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

$\square$

2.1.4. Ángulo entre vectores

La Desigualdad de Cauchy - Schwarz nos permite definir el ángulo entre dos vectores. Observemos que, si $u \neq 0_{\mathbb{V}}$ y $v \neq 0_{\mathbb{V}}$ son linealmente independientes entonces,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

Ahora sea $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ siendo, $f(\theta) = cos\theta$, sabemos que la función coseno es continua en todos los reales, en particular en $[0, \pi]$. Por el teorema de los valores intermedios, dado un número real d tal que, $-1 \leq d \leq 1$, existe un número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que, $f(\theta) = d$. Además, puesto que $f(\theta) = cos\theta$ es inyectiva en $[0, \pi] \to [-1, 1]$, se tiene que este $\theta \in [0, \pi]$ es único. Si consideramos $d = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$, estamos en las condiciones de la observación anterior luego, existe único $\theta \in [0, \pi]$ tal que,

$$cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|cos\theta$$

Ejercicio 2.1.23 *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ dotado con el producto interno canónico. Sea $u = (0, 2)$ y $v = (1, 1)$. Calcular el ángulo entre u y v.*

2.1.5. Distancia

Otra de las nociones que aparece cuando se tiene un espacio vectorial dotado con un producto interno es la de distancia. Cuando a un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se lo dota con un producto interno se inducen las nociones métricas de norma, ángulo y distancia. En particular si $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ está dotado con el producto interno canónico, entonces a $\mathbb{R}^n$ se lo denomina *Espacio Euclídeo.* Antes de definir que entendemos por distancia demostraremos otra importante desigualdad.

Teorema 2.1.24 ***Desigualdad Triangular o de Minkowski***
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$. Sea $u, v \in \mathbb{V}$ entonces,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Demostración 2.1.25 *Observemos que,*

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \qquad (2.3)$$

Por la desigualdad de Cauchy - Schwarz, sabemos que, $\langle u, v\rangle \leq |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, reemplazando en (2.3) se tiene,

$$\|u + v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \qquad (2.4)$$

Luego de (2.4)se sigue,

$$\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 \Leftrightarrow \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

□

Definición 2.1.26 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$ y sea $\| \ \|$ la norma inducida por este producto interno. Definimos la **distancia** entre el vector $u \in \mathbb{V}$ y el vector $v \in \mathbb{V}$ como,*

$$d(u, v) = \|v - u\|$$

Puesto que $\langle , \rangle$ es un producto interno y $\| \ \|$ la norma inducida, se deja como **ejercicio** probar las siguientes propiedades para la distancia:

1. Sean $u, v \in \mathbb{V}$
$$d(u, v) \geq 0$$
2. Sean $u, v \in \mathbb{V}$
$$d(u, v) = d(v, u)$$
3. Sean $u, v, w \in \mathbb{V}$
$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(v, w)$$

2.2. Base Ortogonal

Cuando estamos en presencia de un espacio con producto interno podemos introducir ciertas bases distinguidas del espacio, esto es, *bases ortogonales* y *bases ortonormales*.

Definición 2.2.1 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$. Diremos que un conjunto $A = \{v_1, \cdots, v_r\}$ de vectores no nulos, es un* ***conjunto ortogonal*** *si los elementos de A son mutuamente ortogonales, es decir, $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \ \forall i \neq j, \ i, j = 1, \cdots, r$*

Una propiedad importante de los conjuntos ortogonales es que siempre resultan linealmente independientes, como se demuestra en la siguiente:

Proposición 2.2.2 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$, sea $A = \{v_1, \cdots, v_r\}$ un conjunto ortogonal entonces, A es linealmente independiente.*

Demostración 2.2.3 *Sean $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ escalares reales y consideremos,*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_r v_r = 0_{\mathbb{V}}$$

multiplicando por v_1 ambos lados de la igualdad precedente, esto es,

$$\langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_r v_r, v_1 \rangle = \langle 0_{\mathbb{V}}, v_1 \rangle$$

se obtiene,

$$\alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle = 0$$

Puesto que $\langle v_1, v_1 \rangle \neq 0$ se concluye que, $\alpha_1 = 0$ entonces,

$$\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_r v_r = 0_{\mathbb{V}}$$

iterando el procedimiento hecho con v_1, con los restantes vectores, se llega a la conclusión que, $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \cdots, r$, con lo cual A resulta linealmente independiente $\square$

Definición 2.2.4 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$. Diremos que un conjunto $A = \{v_1, \cdots, v_r\}$ de vectores no nulos, es un* ***conjunto ortonormal*** *si los elementos de A satisfacen:*

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 \ si, \ i = j \\ 0 \ si, \ i \neq j \end{cases}$$

Ejercicio 2.2.5 *Probar que todo conjunto* ***ortonormal*** *es linealmente independiente.*

Definición 2.2.6 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dim$(\mathbb{V}) = n$, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$. Diremos $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una* ***base ortogonal*** *de $\mathbb{V}$ si, B es un conjunto ortogonal que constituye un sistema de generadores de $\mathbb{V}$.*

Definición 2.2.7 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dim$(\mathbb{V}) = n$, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$. Diremos $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una* ***base ortonormal*** *de $\mathbb{V}$ si, B es un conjunto ortonormal que genera a $\mathbb{V}$.*

Ejemplo 2.2.8

1. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ dotado con el producto interno canónico. Entonces, $B = E = \{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.*

2. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$ dotado con el producto interno canónico. Se deja como ejercicio verificar que, $B = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,3,4),(0,0,4,-3)\}$ es base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ pero no es una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.*

3. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$ dotado con el producto interno canónico. Por item (2) sabemos que, $B = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,3,4),(0,0,4,-3)\}$ es base ortogonal de $\mathbb{R}^4$, B no es una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$, sin embargo se puede obtener una base ortonormal a partir de esta base ortogonal, simplemente multiplicando a cada vector por el inverso multiplicativo de la norma de cada vector. Se deja como ejercicio verificar, que la base ortonormal obtenida a partir de B es $B' = \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), (0, 0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (0, 0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5})\}$*

Definición 2.2.9 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dim$(\mathbb{V}) = n$, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$. Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ un subespacio de $\mathbb{V}$. Diremos $B = \{v_1, \cdots, v_r\}$ es una* ***base ortogonal*** *de $\mathbb{S}$ si, B es sistema de generadores de $\mathbb{S}$, que además es conjunto ortogonal.*

Definición 2.2.10 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dim$(\mathbb{V}) = n$, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$. Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ un subespacio de $\mathbb{V}$. Diremos $B = \{u_1, \cdots, u_r\}$ es una* ***base ortonormal*** *de $\mathbb{S}$ si, B es sistema de generadores de $\mathbb{S}$ y B es conjunto ortonormal.*

Ejemplo 2.2.11 *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$ dotado con el producto interno canónico y sea $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por:*

$$\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Se pide determinar una base ortonormal de $\mathbb{W}$

Solución 2.2.12 *Observemos que,*

$$\mathbb{W} = gen\{(1,1,0,-1),(1,0,1,-1)\}$$

Además $B = \{(1,1,0,-1),(1,0,1,-1)\}$ es linealmente independiente, por lo tanto

$$B = \{\underbrace{(1,1,0,-1)}_{v_1}, \underbrace{(1,0,1,-1)}_{v_2}\}$$

es base de $\mathbb{W}$. Pero B no es base ortogonal pues, $\langle v_1, v_2 \rangle = 2$. A partir de la base B vamos a construir una base ortonormal de $\mathbb{W}$ para ello planteamos:

$$w_1 = v_1 = (1,1,0,-1)$$

Proponemos: $w_2 = v_2 - tw_1 = v_2 - tv_1$ *de forma tal que,* $\langle w_2, w_1\rangle = 0$. *Entonces,*

$$\langle w_2, w_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v_2, v_1\rangle - t\langle v_1, v_1\rangle = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}$$

es decir, $t = \dfrac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} = \frac{2}{3}$. *Luego,*

$$w_2 = v_2 - tv_1 = (1, 0, 1, -1) - \frac{2}{3}(1, 1, 0, -1) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3})$$

Se deja como ejercicio verificar que,

$$\mathbb{W} = gen\{(1, 1, 0, -1), (1, 0, 1, -1)\} = gen\{(1, 1, 0, -1), (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3})\}$$

Además $B' = \{(1, 1, 0, -1), (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3})\}$ *es base ortogonal de* $\mathbb{W}$. *Luego,*

$$B_{ortonormal} = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}\right)\right\}$$

es base ortonormal de $\mathbb{W}$.

2.3. Complemento Ortogonal

2.3.1. Subespacio ortogonal

Definición 2.3.1 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{R}$ *- espacio vectorial, dotado con un producto interno,* $\langle , \rangle$. *Sea* $S \subset \mathbb{V}$ *un subconjunto no vacío de* $\mathbb{V}$, *se define,* $\mathbb{S}^{\perp}$ *como el conjunto de los vectores* $w \in \mathbb{V}$ *que son perpendiculares a todos los elementos de* S *esto es,*

$$\mathbb{S}^{\perp} = \{w \in \mathbb{V} : \langle w, v\rangle = 0,\ \forall v \in S\}$$

El conjunto $S \subset \mathbb{V}$ no necesariamente es un subespacio de $\mathbb{V}$, sin embargo $\mathbb{S}^{\perp}$ tiene estructura de subespacio, como muestra el siguiente resultado:

Proposición 2.3.2 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{R}$ *- espacio vectorial, dotado con un producto interno,* $\langle , \rangle$. *Sea* $S \subset \mathbb{V}$ *un subconjunto no vacío de* $\mathbb{V}$ *entonces,* $\mathbb{S}^{\perp}$ *es subespacio de* $\mathbb{V}$.

Demostración 2.3.3 1. *El cero de* $\mathbb{V}$ *está en* $\mathbb{S}^{\perp}$ *pues,* $\langle 0_{\mathbb{V}}, v\rangle = 0$, $\forall v \in S$

2. *Sean* $w_1, w_2 \in \mathbb{S}^{\perp}$ *entonces,*

$$\langle w_1 + w_2, v\rangle = \langle w_1, v\rangle + \langle w_2, v\rangle = 0,\ \forall v \in S$$

luego, $w_1 + w_2 \in \mathbb{S}^{\perp}$

3. *Sea* $w \in \mathbb{S}^{\perp}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *entonces,*

$$\langle \lambda w, v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle = 0,\ \forall v \in S$$

luego, $\lambda w \in \mathbb{S}^{\perp}$. *De esta forma resulta* $\mathbb{S}^{\perp}$ *subespacio de* $\mathbb{V}$

$\square$

En el caso en que $S = \mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$, se tiene el siguiente importante resultado.

Proposición 2.3.4 ***Complemento Ortogonal***
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión n, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$. Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ un subespacio de $\mathbb{V}$ entonces,

$$\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^{\perp} = \mathbb{V}$$

Demostración 2.3.5

1. *Se deja como ejercicio probar que: si $\mathbb{S} = \{0_{\mathbb{V}}\}$ entonces, $\mathbb{S}^{\perp} = \mathbb{V}$ y el caso $\mathbb{S} = \mathbb{V}$ entonces, $\mathbb{S}^{\perp} = \{0_{\mathbb{V}}\}$.*

2. *Supongamos que $\mathbb{S}$ con $dim(\mathbb{S}) = r > 0$, sea $B_{\mathbb{S}} = \{v_1, \cdots, v_r\}$ una base ortogonal del subespacio $\mathbb{S}$. Puesto que, $B_{\mathbb{S}}$ es linealmente independiente, completamos a una base ortogonal B del espacio vectorial $\mathbb{V}$, es decir, $B = \{v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots w_{n-r}\}$. Demostraremos que $B_{\mathbb{S}^{\perp}} = \{w_1, \cdots w_{n-r}\}$ es base de $\mathbb{S}^{\perp}$, veamos esto,*

   a) *$B_{\mathbb{S}^{\perp}} = \{w_1, \cdots w_{n-r}\}$ es sistema de generadores de $\mathbb{S}^{\perp}$. Sea $w \in \mathbb{S}^{\perp}$, por definición de $\mathbb{S}^{\perp}$ esto ocurre si y sólo si: $w \in \mathbb{V}$ y además, $\langle w, v\rangle = 0,\ \forall v \in \mathbb{S}$. Por estar w en $\mathbb{V}$ y por ser $B = \{v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots w_{n-r}\}$ base de $\mathbb{V}$ entonces,*

   $$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n-r} w_{n-r}$$

   Como $\langle w, v\rangle = 0,\ \forall v \in \mathbb{S}$ en particular esto se cumple para los $v_j,\ j = 1, \cdots, r$ es decir, $\langle w, v_j\rangle = 0,\ j = 1, \cdots, r$ lo cual implica,

   $$\langle w, v_j\rangle = \alpha_1\langle v_1, v_j\rangle + \cdots + \alpha_j\langle v_j, v_j\rangle + \cdots + \alpha_r\langle v_r, v_j\rangle + \beta_1\langle w_1, v_j\rangle + \cdots + \beta_{n-r}\langle w_{n-r}, v_j\rangle$$

   Por ser B base ortogonal, salvo el producto $\langle v_r, v_j\rangle \neq 0$, todos los otros productos se anulan. Por lo tanto,

   $$\langle w, v_j\rangle = \alpha_j\langle v_j, v_j\rangle = 0 \Longrightarrow \alpha_j = 0$$

   Esto se obtiene para cada $j = 1, \cdots, r$, por lo tanto,

   $$w = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_{n-r} w_{n-r} \Longrightarrow w \in gen\{w_1, \cdots w_{n-r}\}$$

   Así $B_{\mathbb{S}^{\perp}} = \{w_1, \cdots w_{n-r}\}$ resulta sistema de generadores.

   b) *$B_{\mathbb{S}^{\perp}} = \{w_1, \cdots w_{n-r}\}$ resulta linealmente independiete por ser un conjunto ortogonal Proposición 2.2.2.*

3. *Al ser $B_{\mathbb{S}^{\perp}} = \{w_1, \cdots w_{n-r}\}$ base de $\mathbb{S}^{\perp}$ se tiene que, $dim(\mathbb{S}^{\perp}) = n - r$. De esta forma probamos que,*

   $$dim(\mathbb{S} + \mathbb{S}^{\perp}) = r + (n - r) = n = dim(\mathbb{V})$$

   Como $\mathbb{S} + \mathbb{S}^{\perp} \subseteq \mathbb{V}$ y tienen la misma dimensión se concluye que, $\mathbb{S} + \mathbb{S}^{\perp} = \mathbb{V}$.

4. *Falta ver que $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}^{\perp} = \{0_{\mathbb{V}}\}$. Para ver esto, sea $v \in \mathbb{S} \cap \mathbb{S}^{\perp}$ entonces, $v \in \mathbb{S}$ y $v \in \mathbb{S}^{\perp}$. Por ser $v \in \mathbb{S}$ se escribe como combinación lineal de los elementos de la base de $B_{\mathbb{S}} = \{v_1, \cdots, v_r\}$,*

   $$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$$

y también v se escribe en la forma,

$$v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{n-r} w_{n-r}$$

por ser $v \in \mathbb{S}^{\perp}$. Luego,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{n-r} w_{n-r}$$

de donde,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r + (-\lambda_1) w_1 + \cdots + (-\lambda_{n-r}) w_{n-r} = 0_{\mathbb{V}}$$

puesto que, $B = \{v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots w_{n-r}\}$ es base de $\mathbb{V}$, todos los escalares son cero. Entonces, $v = 0_{\mathbb{V}}$ y esto prueba que el único elemento de la intersección es el cero de $\mathbb{V}$. Finalmente concluimos que, $\mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^{\perp} = \mathbb{V}$.

□

Definición 2.3.6 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, dotado con un producto interno, $\langle , \rangle$. Sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ un subespacio de $\mathbb{V}$, el subespacio, $\mathbb{S}^{\perp}$ se denomina **Complemento Ortogonal** de $\mathbb{S}$*

Ejemplo 2.3.7 *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$ dotado con el producto interno canónico y sea $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por:*

$$\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Se pide:

1. *Hallar una base del complemento ortogonal de $\mathbb{W}$*
2. *Hallar un vector w de $\mathbb{W}$ tal que, $d(v, w) = 2\sqrt{3}$, donde, $v = (0, 1, 5, -2)$*

Solución 2.3.8 *1 En el Ejemplo 2.2.11, vimos que*

$$B_{\mathbb{W}} = \{(1, 1, 0, -1), (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3})\}$$

es base ortogonal de $\mathbb{W}$. Ahora completamos a una base ortogonal de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$, por ejemplo,

$$B_{\mathbb{R}^4} = \{(1, 1, 0, -1), (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1, -\frac{1}{3}), (1, 0, 0, 1), (-1, 2, 2, 1)\}$$

De acuerdo a la Proposición 2.3.4 se tiene que

$$B_{\mathbb{W}^{\perp}} = \{(1, 0, 0, 1), (-1, 2, 2, 1)\}$$

es base de $\mathbb{W}^{\perp}$.

2 Puesto que

$$B_{\mathbb{R}^4} = \{(1,1,0,-1),(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1,-\frac{1}{3}),(1,0,0,1),(-1,2,2,1)\}$$

es una base ortogonal de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$ *y,*

$$B_{\mathbb{W}} = \{(1,1,0,-1),(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1,-\frac{1}{3})\}$$

$$B_{\mathbb{W}^{\perp}} = \{(1,0,0,1),(-1,2,2,1)\}$$

Se tiene que, para cualquier $v \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^4$ *se cumple:*

$$v = \underbrace{\alpha_1(1,1,0,-1) + \alpha_2(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1,-\frac{1}{3})}_{=w\in\mathbb{W}} + \underbrace{\beta_1(1,0,0,1) + \beta_2(-1,2,2,1)}_{=w'\in\mathbb{W}^{\perp}}$$

Observemos que $w \perp w'$*, además* $w \in \mathbb{W}$ *es el vector de* $\mathbb{W}$ *que realiza la distancia entre,* v *y* $\mathbb{W}$*. Se cumple,*

$$2\sqrt{3} = d(v,w) = \|w'\| \Leftrightarrow \|w'\|^2 = 12$$

Por otro lado vale el Teorema de Pitágoras,

$$\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|w'\|^2$$

Puesto que, $\|v\|^2 = 30$ *entonces,* $\|w\|^2 = 18$*. Vimos que,*

$$w = \alpha_1(1,1,0,-1) + \alpha_2(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1,-\frac{1}{3})$$

entonces,

$$18 = \|w\|^2 = 3\alpha_1^2 + \frac{5}{3}\alpha_2^2$$

El objetivo ahora es buscar otra ecuación que relacione α_1 *con* α_2*, para ello, observemos que,*

$$v = w + w' \Leftrightarrow \langle v,w\rangle = \langle w,w\rangle + \langle w',w\rangle = \|w\|^2$$

Usando la última identidad, obtenemos:

$$\langle v,w\rangle = 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 18$$

Es decir tenemos,

$$\begin{cases} 3\alpha_1^2 + \frac{5}{3}\alpha_2^2 = 18 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 18 \end{cases}$$

Cuya única! solución es $\alpha_2 = 3$ *y* $\alpha_1 = 1$*, de esta forma el vector (único)* w *buscado es,*

$$w = (2, -1, 3, -2)$$

Capítulo 3

Transformaciones Lineales

Este capítulo está dedicado a estudiar un tipo particular de *funciones* denominadas *transformaciones lineales*. Una transformación lineal es una aplicación que se establece entre los elementos de dos espacios vectoriales. A estas funciones se les requerirá que transformen la suma de vectores en el espacio de partida en suma de los transformados en el espacio de llegada. Además se pedirá que el producto de un vector por un escalar en el espacio dominio, se transforme en el producto de dicho escalar por el transformado en el espacio codominio.

3.1. Transformación Lineal

Definición 3.1.1 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales. La función $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se dice una* ***transformación lineal*** *de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$, si satisface las siguientes propiedades:*

1. $T(u +_{\mathbb{V}} v) = T(u) +_{\mathbb{W}} T(v)$, $\forall u, v \in \mathbb{V}$
2. $T(\alpha ._{\mathbb{V}} u) = \alpha ._{\mathbb{W}} T(u)$, $\forall u \in \mathbb{V}$ *y* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

Ejemplo 3.1.2 *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ pensado como $\mathbb{R}$ - espacio vectorial (con la suma y el producto por un escalar usuales) , definida por*

$$T(v) = 3v$$

Explicitando la expresión de T se tiene: si $v = (x, y)$ entonces, $T(x, y) = (3x, 3y)$.
Para ver que T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, hay que probar que se cumplen las propiedades 1) y 2) de la definición 3.1.1.

1. *Sean $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces,*

$$\begin{gathered} T(u +_{\mathbb{R}^2} v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (3(x_1 + x_2), 3(y_1 + y_2)) \\ = (3x_1 + 3x_2, 3y_1 + 3y_2) = (3x_1, 3y_1) + (3x_2, 3y_2) = T(u) +_{\mathbb{R}^2} T(v) \end{gathered}$$

2. *Sea $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces,*

$$T(\alpha ._{\mathbb{R}^2} u) = T(\alpha ._{\mathbb{R}^2} (x, y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (3(\alpha x), 3(\alpha y)) = \alpha(3x, 3y) = \alpha ._{\mathbb{R}^2} T(u)$$

En el gráfico 3.1 se observa cual es el transformado del triángulo de vértices $v = (1, 1)$, $u = (1, -1)$ y $w = (-1, 0)$ por la transformación $T(x, y) = (3x, 3y)$.

A esta transformación lineal se la denomina ***homotesia*** *de razón 3.*

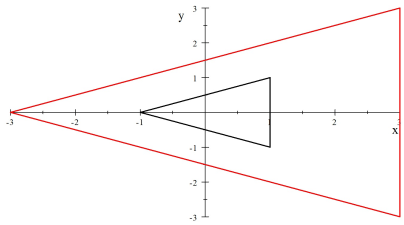


Figura 3.1: Homotesia

Proposición 3.1.3 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Sean $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ escalares en $\mathbb{K}$ y $v_1, \cdots v_n$ vectores de $\mathbb{V}$ entonces:*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i)$$

Demostración 3.1.4 *La demostración es por inducción sobre n*

1. *Si $n = 1$ entonces,*

$$T\left(\sum_{i=1}^{1} \alpha_i v_i\right) = T(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 T(v_1) = \sum_{i=1}^{1} \alpha_i T(v_i)$$

de esta forma la afirmación resulta verdadera para $n = 1$.

2. *Supongamos que la afirmación es verdadera para n entonces,*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i + \alpha_{n+1} v_{n+1}\right) \underbrace{=}_{por\ \ ser\ \ T\ \ t.lineal} T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) + \alpha_{n+1} T(v_{n+1})$$
$$\underbrace{=}_{por\ \ H.I} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) + \alpha_{n+1} T(v_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i T(v_i)$$

□

Proposición 3.1.5 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Entonces,*

1. $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$
2. *Para todo $v \in \mathbb{V}$ entonces,$T(-v) = -T(v)$*
3. *Para todo $u,\ v \in \mathbb{V}$ se verifica: $T(u - v) = T(u) - T(v)$*

Demostración 3.1.6 1.

$$T(0_{\mathbb{V}}) = T(0v) = 0T(v) = 0_{\mathbb{W}}$$

2.

$$T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = -T(v)$$

3.

$$T(u - v) = T(u + (-v)) = T(u) + T(-v) = T(u) + (-T(v)) = T(u) - T(v)$$

□

La siguiente propiedad dice que toda transformación lineal queda **unívocamente** determinada cuando se la define sobre una base del espacio vectorial dominio.

Proposición 3.1.7 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales. Sea $B = \{v_1, \cdots v_n\}$ base de $\mathbb{V}$ y sean $\{w_1, \cdots w_n\}$ n vectores cualesquiera de $\mathbb{W}$ entonces, existe una única transformación lineal $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tal que*

$$T(v_i) = w_i$$

Para todo $1 \leq i \leq n$

Demostración 3.1.8

1. *Existencia:*

   - *Puesto que $B = \{v_1, \cdots v_n\}$ es base de $\mathbb{V}$, dado cualquier $v \in \mathbb{V}$ existen, únicos escalares, $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ en $\mathbb{K}$ tales que, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Definimos entonces a T como:*

     $$T(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$$

   - *Observar que T cumple con la propiedad $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, \cdots, n$*

   - *Veamos que T es una transformación lineal. Sea $u \in \mathbb{V}$ entonces, $u = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ por lo tanto, $v + u = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n$. De la forma en que hemos definido T se tiene:*

     $$\begin{gathered} T(v+u) = (\alpha_1 + \beta_1)w_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)w_n \\ T(v+u) = (\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n) + (\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n) \\ T(v+u) = T(v) + T(u) \end{gathered}$$

     Dado $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces, $\lambda v = (\lambda\alpha_1)v_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n)v_n$ luego,

     $$\begin{gathered} T(\lambda v) = (\lambda\alpha_1)w_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n)w_n \\ T(\lambda v) = \lambda(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n) \\ T(\lambda v) = \lambda T(v) \end{gathered}$$

     De esta forma T resulta una transformación lineal.

2. *Unicidad: Supongamos que existe una transformación lineal G con la propiedad, $G(v_i) = w_i$ para $i = 1, \cdots, n$. Entonces, si tomamos $v \in \mathbb{V}$, v se escribe como combinación lineal de la base B en forma única $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Como estamos suponiendo G lineal entonces,*

   $$\begin{gathered} G(v) = G(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ G(v) = \alpha_1 G(v_1) + \cdots + \alpha_n G(v_n) \\ G(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = T(v) \end{gathered}$$

   Como la última igualdad se cumple para cualquier $v \in \mathbb{V}$ concluimos que, $G = T$

□

Ejemplo 3.1.9 *Decidir si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:*

$$\begin{gathered} T(-1,1) = (2,1) \\ T(1,1) = (1,-4) \\ T(5,-1) = (-4,-11) \end{gathered}$$

¿Resulta una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$?

Observar que si consideramos el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$, $B = \{(-1,1),(1,1)\}$, éste resulta base de $\mathbb{R}^2$ (verificar esta afirmación). Por ser B base de $\mathbb{R}^2$, el vector $v = (5,-1)$ se escribe como combinación lineal de los elementos de B, de hecho: $v = (5,-1) = -3(-1,1) + 2(1,1)$. Si suponemos que T es transformación lineal se debe cumplir:

$$T(5,-1) = -3T(-1,1) + 2T(1,1)$$

Ahora bien sabemos que $T(-1,1) = (2,1)$ y que $T(1,1) = (1,-4)$ luego,

$$T(5,-1) = -3T(-1,1) + 2T(1,1) = -3(2,1) + 2(1,-4) = (-4,-11)$$

Es decir que $T(5,-1) = (-4,-11)$, como esto coincide con la definición de la T, concluimos que efectivamente existe tal transformación lineal T. Como además está definida sobre una base del espacio de partida, tal T resulta ***única****.*

3.1.1. Núcleo de una Transformación Lineal

Cuando consideramos una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$, $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, donde $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales. Un subconjunto notable del espacio vectorial $\mathbb{V}$ es el conjunto formado por todos los vectores de $\mathbb{V}$, que tienen por imagen el $0_{\mathbb{W}}$. Formalmente:

Definición 3.1.10 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Definimos el* ***Núcleo*** *de T como:*

$$ker(T) = \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0_{\mathbb{W}}\}$$

Nota: Vamos a usar indistintamente $ker(T)$ o bien $Nu(T)$ para denotar el núcleo de la transformación lineal.

Una cuestión que surge naturalmente es preguntarse si el núcleo tiene estructura de espacio vectorial. La respuesta viene dada por la siguiente proposición.

Proposición 3.1.11 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces, $ker(T)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.*

Demostración 3.1.12

- *Por definición sabemos que, $ker(T) = \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0_{\mathbb{W}}\}$ luego claramente $ker(T) \subseteq \mathbb{V}$.*
- *Puesto que, $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$ entonces, $0_{\mathbb{V}} \in ker(T)$ y por lo tanto, $ker(T) \neq \emptyset$.*
- *Sean $u, v \in ker(T)$ entonces,*

  $$T(u+v) = T(u) + T(v) = 0_{\mathbb{W}} + 0_{\mathbb{W}} = 0_{\mathbb{W}}$$

  esto nos dice que $u + v \in ker(T)$
- *Sea $u \in ker(T)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces,*

  $$T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda 0_{\mathbb{W}} = 0_{\mathbb{W}}$$

  luego, $\lambda u \in ker(T)$. Por lo tanto $ker(T)$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

$\square$

Observación 3.1.13 *Al ser $ker(T)$ es un subespacio entonces, podemos hablar de base y dimensión de $ker(T)$.*

Ejemplo 3.1.14 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - 3x_3, x_1 + 3x_3)$$

Hallar una base del núcleo de T y la dimensión del mismo.

Por definición:

$$ker(T) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : T(x_1, x_2, x_3) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Luego $v = (x_1, x_2, x_3) \in ker(T)$ si y sólo si,

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - 3x_3, x_1 + 3x_3) = (0, 0, 0)$$

Así nos queda planteado el siguiente sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Cuya solución es $v = (x_1, x_2, x_3) = t(-3, 3, 1)$, por lo tanto una base para el núcleo de la transformación es,

$$B_{ker(T)} = \{(-3, 3, 1)\}$$

y resulta, $dim(ker(T)) = 1$

Definición 3.1.15 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Si T es una función inyectiva diremos que T es un* ***Monomorfismo***

La siguiente propiedad caracteriza a los monomorfismos en términos del subespacio núcleo.

Proposición 3.1.16 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces, T es un monomorfismo si y sólo si, $ker(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$.*

Demostración 3.1.17

- $\Rightarrow$) *Supongamos que T es monomorfismo. Para ver que, $ker(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ hay que probar la doble inclusión: $ker(T) \subseteq \{0_{\mathbb{V}}\}$ y $ker(T) \supseteq \{0_{\mathbb{V}}\}$*

  1. *Sea $v \in ker(T)$ entonces, $T(v) = 0_{\mathbb{W}} = T(0_{\mathbb{V}})$, puesto que T es inyectiva, concluimos que, $v = 0_{\mathbb{V}}$, es decir, $v \in \{0_{\mathbb{V}}\}$. Así resulta $ker(T) \subseteq \{0_{\mathbb{V}}\}$.*
  2. *$ker(T) \supseteq \{0_{\mathbb{V}}\}$ se cumple trivialmente.*

- $\Leftarrow$) *Supongamos ahora que $ker(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$. Sean $v, u \in \mathbb{V}$ tales que, $T(v) = T(u)$ luego,$T(v) - T(u) = 0_{\mathbb{W}}$, si y sólo si, $T(v - u) = 0_{\mathbb{W}}$, por definición, $v - u \in ker(T)$, así $v - u = 0_{\mathbb{V}}$, por lo tanto, $v = u$. De esta forma deducimos que T es inyectiva y por ende es un monomorfismo.*

□

3.1.2. Imagen de una Transformación Lineal

Consideremos una transformación lineal, $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, donde $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ son $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales. Un subconjunto notable del espacio vectorial $\mathbb{W}$ es el conjunto formado por todos los vectores $w \in \mathbb{W}$, que son imagen de algún elemento $v \in \mathbb{V}$.

Definición 3.1.18 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Definimos el conjunto* ***Imagen*** *de T como:*

$$Im(T) = \{w \in \mathbb{W} : existe,\ v \in \mathbb{V},\ tal\ que,\ T(v) = w\}$$

como en el caso del núcleo ahora el conjunto imagen resulta un subespacio pero, del espacio vectorial codominio. En este sentido tenemos:

Proposición 3.1.19 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Entonces, $Im(T)$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.*

Demostración 3.1.20
- *Por definición sabemos que, $Im(T) = \{w \in \mathbb{W} : existe,\ v \in \mathbb{V},\ tal\ que,\ T(v) = w\}$ luego, $Im(T) \subseteq \mathbb{W}$.*
- *Puesto que, $T(0_{\mathbb{V}}) = 0_{\mathbb{W}}$ entonces, $0_{\mathbb{W}} \in Im(T)$ y por lo tanto, $Im(T) \neq \emptyset$.*
- *Sean $w_1, w_2 \in Im(T)$ entonces, existen $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tales que,*

$$T(v_1) = w_1, \quad T(v_2) = w_2$$

Luego

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

esto significa que que $w_1 + w_2 \in Im(T)$

- *Sea $w \in Im(T)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces,*

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda w$$

luego, $\lambda w \in Im(T)$. Por lo tanto $Im(T)$ es un subespacio de $\mathbb{W}$.

$\square$

La siguiente proposición nos enseña como obtener un conjunto de generadores del subespacio imagen.

Proposición 3.1.21 *Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal, si $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{V}$ entonces, $Im(T) = gen\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_m)\}$.*

Demostración 3.1.22 *Sea $w \in Im(T)$, por definición, existe $v \in \mathbb{V}$ tal que, $w = T(v)$. Puesto que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{V}$ entonces,*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$$

es decir:

$$w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m)$$

entonces,

$$w = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_m T(v_m)$$

La última identidad nos dice que w es combinación lineal de $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_m)\}$. Por lo tanto, $Im(T) = gen\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_m)\}$. $\square$

Definición 3.1.23 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Si T es una función suryectiva i.e. $Im(T) = \mathbb{W}$ diremos que T es un* ***Epimorfismo****.*

Definición 3.1.24 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, que simultáneamente es monomorfismo y epimorfismo entonces, T se dice un* ***Isomorfismo****.*

Ejemplo 3.1.25 *Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$, aquí $\mathbb{P}_2$, denota el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos. La transformación lineal T está definida por:*

$$T\left(a + bt + ct^2\right) = (a + 3b, b - 2c, a + 2b + 2c)$$

Determinar si T es un epimorfismo

Analicemos el subespacio imagen de T:

$$Im(T) = \{w = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : p \in \mathbb{P}_2,\ T(p) = w\}$$

Luego $w = (y_1, y_2, y_3) \in Im(T)$ si y sólo si,

$$T\left(a + bt + ct^2\right) = (a + 3b, b - 2c, a + 2b + 2c) = (y_1, y_2, y_3)$$

Así nos queda planteado el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que son a, b, c:

$$\begin{cases} a + 3b = y_1 \\ b - 2c = y_2 \\ a + 2b + 2c = y_3 \end{cases}$$

Este sistema resulta compatible si y sólo si, $-y_1 + y_2 + y_3 = 0$ luego, $w = (y_1, y_2, y_3) = (y_2 + y_3, y_2, y_3)$, por lo tanto una base para la imagen de T es,

$$B_{Im(T)} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

y resulta, $dim(Im(T)) = 2$ con lo cual, $Im(T) \subsetneqq \mathbb{R}^3$. De esta manera concluimos que T no es un epimorfismo.

3.1.3. Propiedades

Proposición 3.1.26 *Sea $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ una transformación lineal si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{V}$ entonces, $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ es linealmente dependiente en $\mathbb{W}$.*

Demostración 3.1.27 *Puesto que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{V}$ entonces, existe un j tal que $v_j = \sum_{i=1 i\neq j}^{n} \alpha_i v_i$, aplicando a esa igualdad la transformación lineal T se tiene :*

$$T(v_i) = T\left(\sum_{i=1 i\neq j}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1 i\neq j}^{n} \alpha_i T(v_i)$$

Se obtiene así que $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ *es un conjunto linealmente dependiente.* □

Proposición 3.1.28 *Sea* $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ *una transformación lineal y* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *un conjunto de vectores de* $\mathbb{V}$*, tal que* $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ *es un conjunto linealmente independiente entonces,* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es linealmente independiente.*

Demostración 3.1.29 *Para ver que* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es linealmente independiente se plantea* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0_{\mathbb{V}}$*, y se debe demostrar que los escalares son todos nulos. Como*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 v_i\right) = T(0_{\mathbb{V}})$$

Pues T *es una transformación lineal entonces,* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = 0_{\mathbb{W}}$*. Ademas como* $\{T(v_i)\}_{i=1}^{n}$ *es un conjunto linealmente independiente entonces,* $\alpha_i = 0,\ \forall i = 1, ..., n$ *luego* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es un conjunto linealmente independiente.* □

Proposición 3.1.30 *Sea* $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ *un monomorfismo, si* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *es un conjunto linealmente independiente entonces* $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ *también es un conjunto linelamente independiente.*

Demostración 3.1.31 *Consideremos,*

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0_{\mathbb{W}} \tag{3.1}$$

hay que probar que $\alpha_j = 0,\ j = 1, \cdots, n$*. La ecuación 3.1 se puede reescribir en la forma:*

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = T(0_{\mathbb{V}})$$

puesto que T *es inyectiva, se sigue que,*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{V}}$$

al ser $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *un conjunto linealmente independiente entonces,*

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \cdots\ \alpha_n = 0$$

Como queríamos ver. □

Teorema 3.1.32 ***Teorema de la Dimensión***
Sea $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de dimension finita,* $\mathbb{W}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y* $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ *una transformación lineal entonces,*

$$dim(\mathbb{V}) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T))$$

Demostración 3.1.33 *El subespacio* $Im(T)$ *es de dimensión finita, pues si no contradice la hipótesis que* $dim(\mathbb{V})$ *es finita (demostrar esta afirmación). Supondremos que* $dim(\mathbb{V}) = n$ *y que* $dim(Nu(T)) = p$

Caso 1: $n = p$

Si $dim(Nu(T)) = n$*, entonces,* T *es la transformación lineal nula,* $Im(T) = \{0_{\mathbb{W}}\}$ *entonces,* $dim(Im(T)) = 0$*, así verifica que,*

$$dim(\mathbb{V}) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T))$$

Pues,

$$n = n + 0$$

Caso 2: $p = 0$*, se deja como ejercicio.*

Caso 3: $0 < p < n$

Sea $B = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ *una base de* $Nu(T)$*. Usando el teorema de extensión a una base, se extiende la base del núcleo a una base de todo el espacio* $\mathbb{V}$*, sea,*

$$B_{\mathbb{V}} = \{v_1, v_2, ..., v_p, u_1, u_2, ..., u_{n-p}\}$$

dicha base.

Se consideran las imágenes de los vectores u_j*, esto es,* $T(u_j) = w_j$ *con* $j = 1, .., n-p$ *. Llamemos* D *al conjunto de vectores de* $\mathbb{W}$*,* $D = \{w_1, w_2, ..., , w_{n-p}\}$*. Se verificará que el conjunto* D *forma una base para* $Im(T)$*.*

1) $D = \{w_1, w_2, ..., , w_{n-p}\}$ *es linealmente independiente.*

Sea $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j w_j = 0_{\mathbb{W}}$ *debemos probar que los escalares son todos nulos.*

Si

$$\sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j w_j = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j T(u_j) = 0_{\mathbb{W}} \Rightarrow T\left(\sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j u_j\right) = 0_{\mathbb{W}}$$

Luego $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j u_j \in Nu(T)$ *por lo tanto el vector* $\cdot\sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j u_j$ *se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base del núcleo, es decir:*

$$\sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j u_j = \sum_{i=1}^{p} \beta_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} (-\beta_i) v_i + \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j u_j = 0_{\mathbb{V}}$$

Como $B_{\mathbb{V}}$ *es base de* $\mathbb{V}$ *los escalares son todos nulos, es decir,* $\beta_i = 0 \ \forall \ i = 1, ..., p$ *y* $\alpha_j = 0 \ \forall \ j = 1, ..., n-p$*.*

Así se obtiene que $\alpha_j = 0 \ \forall j = 1, ..., n-p$*, luego* $D = \{w_1, w_2, ..., w_{n-p}\}$ *resulta linealmente independiente.*

2) $D = \{w_1, w_2, ..., w_{n-p}\}$ *es sistema de generadores para la* $Im(T)$*.*

Sea $w \in Im(T)$ *entonces, existe* $v \in \mathbb{V}$ *tal que* $T(v) = w$*. Se escribe al vector* v *como combinación lineal de los elementos de la base* $B_{\mathbb{V}}$ *es decir,* $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \beta_i v_i + \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j u_j$*,*

puesto que, $w = T(v)$ *entonces,*

$$T\left(\sum_{i=1}^{p} \beta_i v_i + \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j u_j\right) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i T(v_i) + \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j T(u_j) = \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j T(u_j) = \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j w_j$$

Aquí se ha usado el hecho de que $T(v_i) = 0_{\mathbb{W}} \forall\ i = 1, ..., p$
Luego $w = \sum_{j=1}^{n-p} \alpha_j w_j$ *entonces,* $D = \{w_1, w_2, .., w_{n-p}\}$ *es sistema de generadores para* $Im(T)$*. Con esto se termina de probar que* $D = \{w_1, w_2, .., w_{n-p}\}$ *es base de* $Im(T)$*, por lo que la* $dim(Im(T)) = n - p$ *de esta forma resulta:*

$$dim(\mathbb{V}) = n = p + (n - p) = dim(Nu(T)) + dim(Im(T))$$

□

3.2. Matriz asociada a una Transformación Lineal

Dada una transformación lineal T, definida sobre un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial $\mathbb{V}$, con imagen en un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial $\mathbb{W}$, ambos de dimensiones finitas, y fijando una base del espacio de partida y una base del espacio de llegada, se puede asociar una matriz a la transformación lineal, esta matriz depende del par de bases elegidas. Veremos que esta matriz contiene toda la información de la transformación lineal. Por ejemplo, a partir de la matriz podemos determinar bases del núcleo y la imagen. Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 3.2.1 *Sean* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$*,* $\mathbb{K}$ *- espacios vectoriales y* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal. Sean* $B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *y* $B_2 = \{w_1, \cdots, w_m\}$ *bases de* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$*, respectivamente. Definimos la* ***matriz asociada*** *a* T *en las bases* B_1 *y* B_2*, como la matriz cuyas columnas son los vectores coordenados,* $[T(v_j)]_{B_2}$ *con* $1 \leq j \leq n$*. A esta matriz la denotamos por* $\|T\|_{B_1 B_2}$*.*

Observación 3.2.2 *Para hacer explícita la definición, supongamos que,*

$$T(v_j) = a_{1j} w_1 + \cdots + a_{mj} w_m,\ 1 \leq j \leq n$$

Es decir,

$$[T(v_j)]_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\|T\|_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.2.3 *Consideremos la transformación lineal* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2, -x_1 + 4x_2)$$

y las bases $B_1 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$*,* $B_2 = \{(1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ *respectivamente. Se desea calcular la matriz asociada a* T *en las bases* B_1*,* B_2*.*
Debemos calcular las coordenadas de los transformados $T(1, 1)$ *y* $T(-1, 1)$ *en la base* $B_2 = \{(1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$*. Para ello planteamos:*

$$T(1,1) = (2,-1,3) = a_{11}(1,1,0) + a_{21}(1,-1,1) + a_{31}(0,0,1)$$
$$T(-1,1) = (0,-5,5) = a_{21}(1,1,0) + a_{22}(1,-1,1) + a_{32}(0,0,1)$$

Resolviendo los sistemas planteados obtenemos:

$$\|T\|_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Teorema 3.2.4 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Sean $B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \cdots, w_m\}$ bases de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, respectivamente. Sea $\|T\|_{B_1B_2}$ la matriz asociada a T en las bases B_1 y B_2. Entonces,*

$$[T(v)]_{B_2} = \|T\|_{B_1B_2} [v]_{B_1}$$

Demostración 3.2.5 *Supongamos que la matriz $\|T\|_{B_1B_2}$ es:*

$$\|T\|_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

esto nos dice que,

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ &\vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

Vamos a suponer que las coordenadas del transformado de v, respecto a la base B_2 son:

$$[T(v)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Lo cual significa,

$$T(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m$$

Por otro lado supongamos que las coordenadas de v respecto de la base B_1 son ,

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \cdots + \gamma_n v_n$$

Aplicando T a la última igualdad se obtiene,

$$T(v) = \gamma_1 T(v_1) + \gamma_2 T(v_2) + \cdots + \gamma_n T(v_n) \tag{3.2}$$

Reemplazando en 3.2 a $T(v_j)$ *por* $a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m,\ 1 \leq j \leq n$ *se obtiene:*

$$\begin{aligned} T(v) = \quad & \gamma_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m) \\ & +\gamma_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m) \\ & \vdots \\ & +\gamma_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m) \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} T(v) = \quad & (\gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{12} + \cdots + \gamma_n a_{1n})w_1 \\ & +(\gamma_1 a_{21} + \gamma_2 a_{22} + \cdots + \gamma_n a_{2n})w_2 \\ & \vdots \\ & +(\gamma_1 a_{m1} + \gamma_2 a_{m2} \cdots + \gamma_n a_{mn})w_m \end{aligned}$$

Como $T(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m$ *se tiene:*

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m = \quad & (\gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{12} + \cdots + \gamma_n a_{1n})w_1 \\ & +(\gamma_1 a_{21} + \gamma_2 a_{22} + \cdots + \gamma_n a_{2n})w_2 \\ & \vdots \\ & +(\gamma_1 a_{m1} + \gamma_2 a_{m2} \cdots + \gamma_n a_{mn})w_m \end{aligned}$$

Por la unicidad de las coordenadas respecto de una base se llega a,

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \quad & \gamma_1 a_{11} + \gamma_2 a_{12} + \cdots + \gamma_n a_{1n} \\ \lambda_2 = \quad & \gamma_1 a_{21} + \gamma_2 a_{22} + \cdots + \gamma_n a_{2n} \\ & \vdots \\ \lambda_m = \quad & \gamma_1 a_{m1} + \gamma_2 a_{m2} \cdots + \gamma_n a_{mn} \end{aligned}$$

Esto se puede reescribir en la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

La última igualdad significa:

$$[T(v)]_{B_2} = \|T\|_{B_1 B_2} [v]_{B_1}$$

Como queríamos ver. $\square$

Ejemplo 3.2.6 *Sea* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *la transformación lineal cuya matriz asociada en las bases* $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ *de* $\mathbb{V}$ *y* $B_2 = \{w_1, w_2\}$ *de* $\mathbb{W}$ *es,*

$$\|T\|_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Se desea determinar bases del núcleo y de la imagen de T*.*

- *Base para el núcleo de T*

$$ker(T) = \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0_{\mathbb{W}}\}$$

luego,

$$v \in ker(T) \Leftrightarrow T(v) = 0_{\mathbb{W}} \Leftrightarrow [T(v)]_{B_2} = [0_{\mathbb{W}}]_{B_2}$$

por el Teorema 3.2.4 sabemos que $[T(v)]_{B_2} = \|T\|_{B_1 B_2} [v]_{B_1}$ *por lo tanto,*

$$\|T\|_{B_1 B_2} [v]_{B_1} = [0_{\mathbb{W}}]_{B_2}$$

si suponemos que, $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *entonces:*

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema lineal homogéneo, se obtiene,

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

luego,

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + (-x_1 + 2x_2) v_3 = x_1(v_1 - v_3) + x_2(v_2 + 2v_3)$$

es decir,

$$ker(T) = gen\{v_1 - v_3, v_2 + 2v_3\}$$

Se deja como ejercicio probar que $\{v_1 - v_3, v_2 + 2v_3\}$ *es linealmente independiente. Así resulta* $B_{ker(T)} = \{v_1 - v_3, v_2 + 2v_3\}$ *una base para el núcleo de T. También se desprende que* $dim(ker(T)) = 2$.

- *Base para la imagen de T. Puesto que* $dim(ker(T)) = 2$, *por el Teorema de la dimensión se deduce que* $dim(Im(T)) = 1$ *(observemos que* $dim(\mathbb{V}) = 3$ *por hipótesis). Por otro lado sabemos que,*

$$Im(T) = gen\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\} = gen\{-w_1 + 2w_2, 2w_1 - 4w_2, -w_1 + 2w_2\}$$

El conjunto $\{-w_1 + 2w_2, 2w_1 - 4w_2, -w_1 + 2w_2\}$, *claramente es linealmente dependiente y de éste extraemos una base para la imagen, por ejemplo:*

$$B_{Im(T)} = \{-w_1 + 2w_2\}$$

Corolario 3.2.7 *Sea $T : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{m\times 1}$ una transformación lineal, entonces existe una única matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tal que $T(x) = Ax$.*

Demostración 3.2.8 *Sea $B_1 = E_1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^{n\times 1}$ y $B_2 = E_2 = \{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^{m\times 1}$.*
Al aplicar el teorema se tiene que existe una (única) matriz asociada a la transformación lineal en las bases B_1 y B_2 que designamos por $\|T\|_{B_1B_2}$, puesto que por el teorema se tiene que,

$$[T(x)]_{B_2} = \|T\|_{B_1B_2}[x]_{B_1} \tag{3.3}$$

Si llamamos $A = \|T\|_{B_1B_2} = \|T\|_{E_1E_2}$ donde $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Por otro lado se sabe que,

$$[T(x)]_{E_2} = T(x)$$

$$[x]_{E_1} = x$$

Al reemplazar en 3.3 se obtiene,

$$T(x) = Ax$$

□

3.2.1. Diagramas que conmutan

El problema que nos planteamos es dada una transformación lineal $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, y bases B_1 y B'_1 bases de $\mathbb{V}$, y considerando las bases B_2 y B'_2 de $\mathbb{W}$, nos preguntamos cuál es la relación existe entre $\|T\|_{B'_1B'_2}$ y $\|T\|_{B_1B_2}$. El siguiente teorema da respuesta a esta cuestión.

Teorema 3.2.9 *Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, $dim(\mathbb{V}) = n$, $dim(\mathbb{W}) = m$, tal que B_1 y B'_1 son bases de $\mathbb{V}$ y sean B_2 y B'_2 bases de $\mathbb{W}$. Sean $\|T\|_{B_1B_2}$ y $\|T\|_{B'_1B'_2} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ las matrices asociadas a la transformación lineal T. Sean $C(B_1, B'_1)$ y $C(B_2, B'_2)$ las matrices de cambio de base en $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ respectivamente entonces,*

$$\|T\|_{B'_1B'_2} = C(B_2, B'_2)\|T\|_{B_1B_2}C(B_1, B'_1)^{-1}$$

con esta relación el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{B_1} \arrow[r, "T"', "\|T\|_{B_1B_2}" below] \arrow[d, "C(B_1,B'_1)"'] & \mathbb{W}_{B_2} \arrow[d, "C(B_2,B'_2)"] \\
\mathbb{V}_{B'_1} \arrow[r, "T", "\|T\|_{B'_1B'_2}" below] & \mathbb{W}_{B'_2}
\end{tikzcd}$$

Demostración 3.2.10 *Sabemos que,*

$$
\begin{aligned}
[u]_{B'_1} &= C(B_1, B'_1)[u]_{B_1} && (3.4)\\
[T(u)]_{B'_2} &= C(B_2, B'_2)\,[T(u)]_{B_2} && (3.5)\\
[T(u)]_{B_2} &= \|T\|_{B_1B_2}[u]_{B_1} && (3.6)\\
[T(u)]_{B'_2} &= \|T\|_{B'_1B'_2}[u]_{B'_1} && (3.7)
\end{aligned}
$$

$$\|T\|_{B'_1B'_2}[u]_{B'_1} = [T(u)]_{B'_2} =_{por\ 3\cdot 5} C(B_2, B'_2)[T(u)]_{B_2}$$
$$=_{por\ 3\cdot 6} C(B_2, B'_2)\|T\|_{B_1B_2}[u]_{B_1} =_{por\ 3\cdot 4} C(B_2, B'_2)\|T\|_{B_1B_2}C(B_1, B'_1)^{-1}[u]_{B'_1}$$

Luego,

$$\|T\|_{B_1'B_2'} = C(B_2, B_2')\|T\|_{B_1B_2}C(B_1, B_1')^{-1}$$

□

Ejemplo 3.2.11 *Sea el endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por:*

$$T(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

Consideremos las bases $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ y $B_2 = \{(1,1),(1,-1)\}$, se desea encontrar $\|T\|_{B_1B_2}$ Para ello, se considera la base canónica de $\mathbb{R}^2, E = \{(1,0),(0,1)\}$ y utilicemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2_E \arrow[r, "T", "\|T\|_E"'] \arrow[d, "C(E{,}B_1)"'] & \mathbb{R}^2_E \arrow[d, "C(E{,}B_2)"] \\
\mathbb{R}^2_{B_1} \arrow[r, "T", "\|T\|_{B_1B_2}"'] & \mathbb{R}^2_{B_2}
\end{tikzcd}$$

Por el Teorema 3.2.9 resulta:

$$\|T\|_{B_1B_2} = C(E, B_2)\|T\|_E C(E, B_1)^{-1}$$

En este caso se tiene que,

$$C(E, B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C(E, B_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\|T\|_E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\|T\|_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\|T\|_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Corolario 3.2.12 *Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un endomorfismo, dim$(\mathbb{V}) = n$ tal que B_1 y B_2 son bases de $\mathbb{V}$ y $\|T\|_{B_1}$ es la matriz asociada a la transformación lineal T en la base B_1, $C(B_1, B_2)$ y $\|T\|_{B_2}$ entonces, con la relación, $\|T\|_{B_2} = C(B_1, B_2)\|T\|_{B_1}C(B_1, B_2)^{-1}$ el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_{B_1} \arrow[r, "T", "\|T\|_{B_1}"'] \arrow[d, "C(B_1{,}B_2)"'] & \mathbb{V}_{B_1} \arrow[d, "C(B_1{,}B_2)"] \\
\mathbb{V}_{B_2} \arrow[r, "T", "\|T\|_{B_2}"'] & \mathbb{V}_{B_2}
\end{tikzcd}$$

Demostración 3.2.13 *Se deja como ejercicio la demostración de este corolario.*

Definición 3.2.14 *Dos matrices A y B de $\mathbb{K}^{n\times n}$ son **semejantes** si existe una matriz invertible H de $\mathbb{K}^{n\times n}$ tal que, $B = HAH^{-1}$*

Cuando dos matrices A y B son semejantes, se denota por $A \sim B$.

Observación 3.2.15 *Si dos matrices A y B representan la misma transformación lineal en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ respecto de dos bases distintas B_1 y B_2 existe una matriz no singular H (en este caso $H = C(B_1, B_2)$) tal que, $B = HAH^{-1}$. En particular H es la matriz de cambio de base de B_1 y B_2. Recíprocamente si para dos matrices de $n \times n$, A y B, existe una matriz H no singular tal que $B = HAH^{-1}$, entonces existe un endomorfismo de $\mathbb{V}$ tal que A es la matriz asociada a al endomorfismo en la base B_1, mientras que B es la matriz asociada a T en la base B_2*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}_{B_1} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "C(B_1,B_2)"'] & \mathbb{V}_{B_1} \arrow[d, "C(B_1,B_2)"] \\ \mathbb{V}_{B_2} \arrow[r, "B"] & \mathbb{V}_{B_2} \end{tikzcd}$$

Entonces,

$$B = C(B_1, B_2)AC(B_1, B_2)^{-1}$$

Es decir $A \sim B$.

3.3. Composición de Transformaciones Lineales

Definición 3.3.1 *Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{U}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales. Sean $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $G : \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ transformaciones lineales. Se define la función compuesta $G \circ T$, a la función que asigna a cada $v \in \mathbb{V}$ el vector $(G \circ T)(v) \in \mathbb{U}$, dado por,*

$$(G \circ T)(v) = G(T(v)), \ \forall v \in \mathbb{V}$$

En las condiciones de la definición, la función $G \circ T$ resulta una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{U}$.

Proposición 3.3.2 *Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{U}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales. Sean $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $G : \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ transformaciones lineales. Entonces, la función compuesta $G \circ T : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ es transformación lineal.*

Demostración 3.3.3

- *Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ entonces,*

$$(G \circ T)(v_1 + v_2) = G(T(v_1) + T(v_2)) = G(T(v_1)) + G(T(v_2)) = (G \circ T)(v_1) + (G \circ T)(v_2)$$

- *Sea $v \in \mathbb{V}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces,*

$$(G \circ T)(\lambda v) = G(T(\lambda v)) = G(\lambda T(v)) = \lambda G(T(v)) = \lambda(G \circ T)(v)$$

□

Si se fijan bases en los espacios respectivos, cada transformación lineal tiene una matriz asociada y puesto que, la composición de transformaciones lineales es una transformación lineal, una pregunta que surge es; ¿cuál es la relación entre las matrices asociadas a las respectivas transformaciones con la matriz asociada a la composición? La respuesta viene dada por la siguiente proposición:

Proposición 3.3.4 *Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ y $\mathbb{U}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales. Sean $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ y $G : \mathbb{W} \to \mathbb{U}$ transformaciones lineales. Sean $B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$, $B_2 = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base de $\mathbb{W}$ y $B_3 = \{u_1, \cdots, u_r\}$ base de $\mathbb{U}$. Sean $\|T\|_{B_1 B_2}$ y $\|G\|_{B_2 B_3}$ las matrices asociadas a T y G en las respectivas bases. Entonces,*

$$\|G \circ T\|_{B_1 B_3} = \|G\|_{B_2 B_3} \|T\|_{B_1 B_2}$$

Demostración 3.3.5 *Denotando por $w \in \mathbb{W}$ a la imagen de $v \in \mathbb{V}$ es decir, $w = T(v) \in \mathbb{W}$ entonces,*

$$[w]_{B_2} = [T(v)]_{B_2} = \|T\|_{B_1 B_2} [v]_{B_1} \tag{3.8}$$

Esta igualdad vale para todo $v \in \mathbb{V}$. Por otro lado,

$$[G(w)]_{B_3} = \|G\|_{B_2 B_3} [w]_{B_2} \tag{3.9}$$

Si se reemplaza el valor de $[w]_{B_2}$ en 3.9, por la identidad dada en 3.8, se obtiene,

$$[G(w)]_{B_3} = \|G\|_{B_2 B_3} \|T\|_{B_1 B_2} [v]_{B_1} \tag{3.10}$$

Teniendo en cuenta que, $[G(w)]_{B_3} = [(G \circ T)(v)]_{B_3} = \|G \circ T\|_{B_1 B_3} [v]_{B_1}$ y sustituyendo en 3.10 se deriva,

$$\|G \circ T\|_{B_1 B_3} [v]_{B_1} = \|G\|_{B_2 B_3} \|T\|_{B_1 B_2} [v]_{B_1}$$

Como esto vale para todo $v \in \mathbb{V}$ se deduce,

$$\|G \circ T\|_{B_1 B_3} = \|G\|_{B_2 B_3} \|T\|_{B_1 B_2}$$

$\square$

3.3.1. Transformación Lineal Inversa

Definición 3.3.6 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, se dice que T es **invertible**, si existe una función $G : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ tal que*

$$(G \circ T)(v) = v, \ \forall v \in \mathbb{V}$$

y

$$(T \circ G)(w) = w, \ \forall w \in \mathbb{W}$$

Proposición 3.3.7 *En las condiciones de la definición 3.3.6 la función G es **única**.*

Demostración 3.3.8 *Supongamos que existe una función $H : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ que satisface, $(H \circ T)(v) = v, \ \forall v \in \mathbb{V}$ y $(T \circ H)(w) = w, \ \forall w \in \mathbb{W}$ entonces,*

$$H(w) = H((T \circ G)(w)) = H(T(G(w))) = (H \circ T)(G(w)) = G(w)$$

como la igualdad vale para todo $w \in \mathbb{W}$ entonces, $H = G$ $\square$

Si una transformación lineal es invertible entonces, por la proposición anterior la función G es única, por lo tanto adoptaremos la siguiente notación:

Notación 3.3.9 *Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal invertible entonces, denotamos a la función G de la definición 3.3.6 por $G = T^{-1}$.*

Observación 3.3.10 *Una transformación lineal T **invertible** es una función que tiene inversa y por lo tanto es biyectiva es decir es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Proposición 3.3.11 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal **invertible** entonces, $T^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ es una transformación lineal.*

Demostración 3.3.12

1. *Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{W}$ luego, existen $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ tales que,*

$$T(v_1) = w_1, \quad T(v_2) = w_2$$

por ser T transformación lineal, también se tiene,

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

como T es invertible se obtiene,

$$v_1 = T^{-1}(w_1), \quad v_2 = T^{-1}(w_2) \quad v_1 + v_2 = T^{-1}(w_1 + w_2)$$

Entonces,

$$T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2) = v_1 + v_2 = T^{-1}(w_1 + w_2)$$

2. *Sea $w \in \mathbb{W}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ luego, existe $v \in \mathbb{V}$ tale que, $T(v) = w$. Por ser T transformación lineal, se cumple, $T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda w$. Entonces,*

$$T^{-1}(\lambda w) = \lambda v = \lambda T^{-1}(w)$$

de esta forma T^{-1} resulta transformación lineal.

□

Observación 3.3.13 *Se ha visto que T^{-1} es transformación lineal que, también resulta biyectiva, por lo tanto, es un **isomorfismo** de espacios vectoriales.*

Proposición 3.3.14 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales de dimensión finita. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal invertible. Entonces, $dim(\mathbb{V}) = dim(\mathbb{W})$*

Demostración 3.3.15 *Supongamos que $dim(\mathbb{V}) = n$ y $dim(\mathbb{W}) = m$. Sabemos $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es isomorfismo entonces, $dim(Im(T)) = n$. Como $Im(T) \subseteq \mathbb{W}$ entonces, $n \leq m$. Por otro lado, $T^{-1} : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ también es isomorfismo luego, $dim(Im(T^{-1})) = m$ y como $Im(T^{-1}) \subseteq \mathbb{V}$ entonces, $m \leq n$. De esta forma concluimos que $dim(\mathbb{V}) = n = m = dim(\mathbb{W})$* □

El interrogante que nos planteamos ahora es ¿cúal es la relación entre la matriz asociada a una transformación lineal invertible y su inversa?. La respuesta viene dada por la siguiente proposición:

Proposición 3.3.16 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal invertible. Sean $B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$, $B_2 = \{w_1, \cdots, w_n\}$ base de $\mathbb{W}$. Sea $\|T\|_{B_1B_2}$ la matriz asociada a T en las respectivas bases. Entonces,*

$$\|T^{-1}\|_{B_2B_1} = \|T\|^{-1}_{B_1B_2}$$

Demostración 3.3.17 *Consideremos el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}_{B_1} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T^{-1}\circ T = Id_{\mathbb{V}}"'] & \mathbb{W}_{B_2} \arrow[d, "T^{-1}"] \\ & \mathbb{V}_{B_1} \end{tikzcd}$$

Se tiene entonces,

$$\|T^{-1}\circ T\|_{B_1B_1} = \|Id_{\mathbb{V}}\|_{B_1B_1}$$

Aplicando la proposición 3.3.4 y teniendo en cuenta que $\|Id_{\mathbb{V}}\|_{B_1B_1} = I_{n\times n} = I$ *se llega a,*

$$\|T^{-1}\|_{B_2B_1}\|T\|_{B_1B_2} = I \tag{3.11}$$

Haciendo un razonamiento similar se obtiene,

$$\|T\|_{B_1B_2}\|T^{-1}\|_{B_2B_1} = I \tag{3.12}$$

De las identidades 3.11 y 3.12 se concluye que $\|T^{-1}\|_{B_2B_1}$ *es invertible y además:*

$$\|T^{-1}\|_{B_2B_1} = \|T\|^{-1}_{B_1B_2}$$

como se quería ver. □

3.4. Transformaciones Ortogonales

Hasta aquí hemos tratado con transformaciones lineales, es decir funciones definidas sobre espacios vectoriales que preservan las operaciones de suma y producto por un escalar. Ahora vamos restringir nuestra mirada a los endomorfismos, que están definidos sobre un espacio vectorial dotado con producto interno. En particular vamos a pedirle al endomorfismo que preserve el producto interno es decir, que el endomorfismo sea una *transformación ortogonal.*

Definición 3.4.1 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{R}$ *- espacio vectorial de dimensión finita, dotado con producto interno* $\langle,\rangle$. *La transformación lineal* $T:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ *se dice una* ***transformación ortogonal*** *si satisface:*

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

Para todo u, v *en* $\mathbb{V}$.

Ejercicio 3.4.2 1. *Sea* $\mathbb{R}^3$ *dotado con su producto interno canónico. Sea* $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$F(x,y,z) = (xcos(\theta) - ysen(\theta), xsen(\theta) - ycos(\theta), z)$$

Donde θ *es un ángulo fijo. Demostrar que* F *es una transformación ortogonal. A la transformación* F *se la llama* ***rotación*** *con eje en* z *y ángulo* θ.

2. *Sea* $\mathbb{R}^3$ *dotado con su producto interno canónico. Sea* $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$\varphi(x,y,z) = (x, -y, z)$$

Demostrar que φ *es una transformación ortogonal. A la transformación ortogonal* φ *se la denomina* ***simetría*** *respecto al plano* xz

La siguiente proposición muestra que una transformación ortogonal conserva las relaciones métricas de vectores.

Proposición 3.4.3 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión finita, dotado con producto interno $\langle , \rangle$. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación ortogonal, entonces se satisfacen:*

1. $\|T(v)\| = \|v\|$ *cualquiera sea* $v \in \mathbb{V}$
2. $\|T(v) - T(u)\| = \|v - u\|$ *para todo* $u, v \in \mathbb{V}$
3. *El ángulo entre* $u, v \in \mathbb{V}$ *es igual al ángulo entre* $T(u)$ *y* $T(v)$

Demostración 3.4.4 1. *Sea* $v \in \mathbb{V}$ *entonces,*

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle \underbrace{=}_{T\ transf.\ ortogonal} \langle v, v\rangle = \|v\|^2$$

de donde concluimos que, $\|T(v)\| = \|v\|$

2. *Sean* $u, v \in \mathbb{V}$ *entonces,*

$$\|T(v)-T(u)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle - 2\langle T(u), T(v)\rangle + \langle T(u), T(v)\rangle = \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|u\|^2 = \|v-u\|^2$$

de donde, $\|T(v) - T(u)\| = \|v - u\|$

3. *Sea* θ *el ángulo entre* $T(u)$ *y* $T(v)$ *(suponemos que* $u \neq 0_{\mathbb{V}}$ *y* $v \neq 0_{\mathbb{V}}$*) entonces,*

$$cos(\theta) = \frac{\langle T(u), T(v)\rangle}{\|T(u)\|\|T(v)\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

Luego el ángulo entre $T(u)$ *y* $T(v)$ *es el mismo que el ángulo entre* u *y* v.

□

Proposición 3.4.5 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión finita, dotado con producto interno $\langle , \rangle$. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación ortogonal entonces, T es un isomorfismo.*

Demostración 3.4.6 *El núcleo de T está definido por:*

$$ker(T) = \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0_{\mathbb{V}}\}$$

Sea $v \in ker(T)$ entonces, $0 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, v\rangle$. Luego, $\langle v, v\rangle = 0$, como el producto es definido positivo, esto se cumple si y sólo si $v = 0_{\mathbb{V}}$. Concluimos que $ker(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$ es decir, $dim(ker(T)) = 0$ y por ende T es monomorfismo. Por el Teorema de la dimensión se tiene, $dim(Im(T)) = dim(\mathbb{V})$ esto nos dice que T es epimorfismo. Por lo tanto T resulta isomorfismo.
□

Vimos en la proposición precedente que toda transformación ortogonal es un isomorfismo. Sabemos que todo isomorfismo transforma una base del espacio de partida en una base del espacio de llegada. En el caso de las transformaciones ortogonales se transforman bases ortonormales en bases ortonormales.

Teorema 3.4.7 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión finita, dotado con producto interno $\langle , \rangle$. Una transformación lineal $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es ortogonal si, y sólo si, transforma bases ortonormales en bases ortonormales.*

Demostración 3.4.8

1. *Supongamos que T es ortogonal. Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$. Sabemos que T es isomorfismo por lo tanto, $B' = \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ es base de $\mathbb{V}$. Falta ver que B' es base ortonormal. Consideremos,*

$$\langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle \underbrace{=}_{B \text{ es ortonormal}} \delta_{ij}$$

Por lo tanto $B' = \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ es base ortonormal.

2. *Supongamos que T transforman bases ortonormales en bases ortonormales. Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$ y $B' = \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ la correspondiente transformada (que sabemos es ortonormal). Sean $u, v \in \mathbb{V}$ entonces,*

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$
$$v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$

Al calcular el producto interno entre u, v se obtiene,

$$\langle u, v\rangle = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

Por otro lado se tiene,

$$T(u) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$$
$$T(v) = \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_n T(v_n)$$

Ahora si se calcula el producto interno entre $T(u), T(v)$ se obtiene,

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

Concluimos que $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$ entonces, la transformación T es ortogonal.

$\square$

Observación 3.4.9 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión finita, dotado con producto interno $\langle , \rangle$. Se considera la transformación ortogonal $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$, una base ortonormal de $\mathbb{V}$. Se desea encontrar la matriz de T asociada a la base B. Para encontrar dicha matriz escribimos $T(v_j)$, $j = 1, \cdots, n$ como combinación lineal de los elementos de B, esto es,*

$$T(v_j) = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{nj}v_n$$

Con esta notación tenemos que,

$$\|T\|_B = (a_{ij})$$

Veamos que $\|T\|_B$ es una matriz ortogonal. Para ello observemos que, por el Teorema 3.4.7 el conjunto $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{V}$, por lo tanto,

$$\langle T(v_j), T(v_k)\rangle = \delta_{j,k}$$

Por otro lado tenemos que,

$$\delta_{j,k} = \langle T(v_j), T(v_k)\rangle = \langle a_{1j}v_1 + \cdots + a_{nj}v_n, a_{1k}v_1 + \cdots + a_{nk}v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik}$$

luego, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = \delta_{j,k}$*, es decir las columnas de* $\|T\|_B$ *son ortonormales, por ende la matriz es ortogonal.*

Capítulo 4

Determinantes

En el presente capítulo veremos que a cada matiz cuadrada (de entradas reales), se le puede asignar un número real mediante una función multilineal alternada, denominada *determinante*. Los determinantes se usan en una diversidad de contextos, por ejemplo podemos citar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, cálculo de la inversa de una matriz. Otras de las aplicaciones es el cálculo del polinomio característico que será estudiado en el capítulo siguiente.

4.1. Introducción

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales (a coeficientes reales), de dos ecuaciones y dos incógnitas, definido por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Si suponemos que $a_{11} \neq 0$ y efectuando el método de eliminación gaussiano, obtenemos el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 = \frac{b_1}{a_{11}} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

Observemos que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ el sistema tiene única solución dada por:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

El núnero $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *determina* si el sitema tiene única solución o no, a este número lo llamaremos el *determinante* de la matriz asociada al sistema. En forma general se tiene la siguiente:

Definición 4.1.1 *Sea A la matriz de $\mathbb{R}^{2\times 2}$,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se define el determinante de A, como la función que a cada matriz de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ le hace corresponder el número real $det(A)$ tal que,

$$det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$$

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 4.1.2

$$det \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 - (-3) \cdot 2 = 21$$

Ahora se generaliza la noción de determinante a matrices de $\mathbb{R}^{n\times n}$. El siguiente Teorema que se da sin demostración, caracteriza al determinate como una función del espacio de matrices cuadradas en el cuerpo.

Teorema 4.1.3 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se considera a la matriz A particionada por columnas, es decir, $A = (A_1 \cdots A_n)$ entonces, la función:*

$$det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

satisface las siguientes propiedades:

1. $$det(A_1...A_j + A'_j...A_n) = det(A_1...A_j...A_n) + det(A_1...A'_j...A_n)$$
2. *Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$*
$$det(A_1...\lambda A_j...A_n) = \lambda det(A_1...A_j...A_n)$$
3. *Si $A_j = A_{j+1}$*
$$det(A_1...A_jA_{j+1}...A_n) = 0$$
4. *Si I es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$*
$$det(I) = 1$$

Cualquier función que satisfaga las cuatro propiedades del Teorema 4.1.3 se dice un determinante. Es más, de existir tal función es única. Por ejemplo comprobemos que para matrices de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ la función definida en 4.1.1 cumple con las condiciones del teorema. Para este caso,

$$det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

1. $$\begin{aligned} det(A_1 + A'_1A_2) &= (a_{11} + a'_{11})a_{22} - a_{12}(a_{21} + a'_{21}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a'_{11}a_{22} - a_{12}a'_{21} \\ &= det(A_1A_2) + det(A'_1A_2) \end{aligned}$$

   Se procede en forma análoga para la segunda columna.

2. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

   $$det(\lambda A_1A_2) = (\lambda a_{11})a_{22} - a_{12}(\lambda a_{21}) = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda det(A_1A_2)$$

   En forma similar se demuestra la propiedad para la segunda columna.

3. Si $A_1 = A_{1+1} = A_2$

$$det(A_1 A_1) = det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11} = 0$$

4. Si I es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$det(I) = det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1$$

Así resulta que la función $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ es el determinante de matrices de dos por dos con entradas reales. La siguiente proposición nos dice que la función determinante es alternada.

Proposición 4.1.4 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, si A' es la matriz que se obtiene a partir de la matriz A, permutando una de sus columnas entonces,*

$$det(A') = -det(A)$$

Demostración 4.1.5 *Por la parte 3) del Teorema 4.1.3, se tiene,*

$$det(A_1 ... A_j + A'_j, A'_j + A_j ... A_n) = 0$$

Aplicando 1) del Teorema 4.1.3,

$$det(A_1...A_j, A'_j...A_n) + \underbrace{det(A_1...A_j, A_j...A_n)}_{=0} + \underbrace{det(A_1...A'_j, A'_j...A_n)}_{=0} + det(A_1...A'_j, A_j...A_n) = 0$$

luego,

$$det(A_1...A'_j, A_j...A_n) = -det(A_1...A_j, A'_j...A_n)$$

□

Otra consecuencia del Teorema 4.1.3 es el siguiente corolario.

Corolario 4.1.6 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces,*

$$det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$$

Demostración 4.1.7 *Aplicando 2) del Teorema 4.1.3, en la primer columna,*

$$det(\lambda A) = det(\lambda A_1 ... \lambda A_j ... \lambda A_n) = \lambda det(A_1 ... \lambda A_j ... \lambda A_n)$$

Iterando el proceso hasta llegar a la última columna, se obtiene,

$$det(\lambda A) = \underbrace{\lambda \cdots \lambda}_{n-veces} det(A_1...A_j...A_n) = \lambda^n det(A)$$

□

Observación 4.1.8 *Es de observar que todas la propiedades enunciadas sobre las columnas de la matriz son válidas para las filas.*

4.2. Calculo del determinante por cofactores

Se ha visto la existencia (y unicidad) del determinante para matrices de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. En esta sección se mostrará una forma de calcular un determinante de orden n por medio de *cofactores.*

Definición 4.2.1 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se denota por $A(i|j)$ a la matriz de $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.*

Definición 4.2.2 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, **el menor** del elemento a_{ij} de A, es $det(A(i|j))$.*

Definición 4.2.3 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, el **cofactor** asociado al elemento a_{ij} de A, denotado por A_{ij}, está definido por:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} det(A(i|j))$$

Ejemplo 4.2.4 *a) Calcular los menores de los elementos a_{32} y a_{23} de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Para este caso se calculan $det(A(3|2))$ y $det(A(2|3))$ es decir:

$$det(A(3|2)) = det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 7$$

$$det(A(2|3)) = det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -3$$

b) Calcular los cofactores asociados a los elementos a_{32} y a_{23} de la matriz A del inciso anterior.
Se tiene que

$$A_{32} = (-1)^{3+2} det(A(3|2)) = -7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} det(A(2|3)) = 3$$

El siguiente Teorema brinda una fórmula para calcular el determinante de una matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Esta fórmula expresa que todo determinante es la suma de los productos de los elementos de la fila i por sus correspondientes cofactores. Es de observar que cada cofactor contiene un determinante de orden $n-1$, con lo cual por iteración se puede llegar a determinantes de orden 2, que es el caso que sabemos calcular. Una fórmula similar es válida para las columnas.
Para probar que efectivamente, la fórmula dada por dicho teorema es la función determinante se usará el Teorema 4.1.3.

Teorema 4.2.5 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces,*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + ... + a_{in}A_{in}$$

Donde i es un número natural entre 1 y n.

Demostración 4.2.6 *La demostración es por inducción sobre n.*

a) Para $n = 1$ se tiene, $A = (a_{11})$, se define, $det(A) = a_{11}$ esta función cumple con las propiedades del Teorema 4.1.3.

b) Supongamos que $det(A) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}A_{ij}$, con $A_{ij} = (-1)^{i+j}det(A(i|j))$, satisface las propiedades del Teorema 4.1.3, y veamos que,

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + ... + a_{in}A_{in}$$

satisface dichas propiedades.

1. *Supongamos que la columna s de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es de la forma: $A_s = A'_s + A''_s$ y por lo tanto, $a_{is} = a'_{is} + a''_{is}$ entonces,*

$$det(A) = det(A_1...A'_s + A''_s...A_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1,\ j\neq s}^{n} a_{ij}A_{ij} + (a'_{is} + a''_{is})A_{is}$$

entonces,

$$det(A_1...A'_s + A''_s...A_n) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n} a_{ij}A_{ij} + a'_{is}A_{is} + a''_{is}A_{is}$$

Por hipótesis inductiva, y considerando que cada determinante de orden $(n-1)$, para $j \neq s$, es la suma de dos determinantes cuyas columnas en el lugar s son A'_s, A''_s se tiene,

$$det(A_1...A'_s + A''_s...A_n) = \left(\sum_{j=1,\ j\neq s}^{n} a_{ij}A_{ij} + a'_{is}A_{is}\right) + \left(\sum_{j=1,\ j\neq s}^{n} a_{ij}A_{ij} + a''_{is}A_{is}\right)$$

es decir,

$$det(A_1...A'_s + A''_s...A_n) = det(A_1...A'_s...A_n) + det(A_1...A''_s...A_n)$$

2. *Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$det(A_1...\lambda A_s...A_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n} a_{ij}A_{ij} + \lambda a_{is}A_{is}$$

Se debe tener en cuenta que al calcular el cofactor A_{ij} para $j \neq s$, A_{ij} es el determinante de una matriz de $(n-1)\times(n-1)$, por lo que vale la hipótesis inductiva, entonces se puede extraer el factor λ y se obtiene:

$$det(A_1...\lambda A_s...A_n) = \lambda \sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n} a_{ij}A_{ij} + \lambda a_{is}A_{is}$$

por lo tanto,

$$det(A_1 ... \lambda A_s ... A_n) = \lambda det(A_1 ... A_s ... A_n)$$

3. Si $A_s = A_{s+1}$

$$det(A_1 ... A_s A_{s+1} ... A_n) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s \\ s+1}}^{n} a_{ij} A_{ij} + a_{is} A_{is} + a_{is+1} A_{is+1}$$

Por la hipótesis inductiva $A_{ij} = 0$, *para* $j \neq s,\ s+1$, *pues tienen dos columnas iguales. Recordando además que* $detA(i \mid s) = detA(i \mid s+1)$, *se tiene:*

$$det(A_1 ... A_s A_{s+1} ... A_n) = a_{is}(-1)^{i+s} detA(i \mid s) + a_{is+1}(-1)^{i+s+1} detA(i \mid s+1) = 0$$

4. Si I *es la matriz identidad de* $\mathbb{R}^{n \times n}$ *entonces,*

$$det(I) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} I_{ij} = a_{ii}(-1)_{i+i} detI(i \mid i) = 1$$

Por el Teorema 4.1.3 y el principio de inducción la función $det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ *es el determinante de matrices de* $\mathbb{R}^{n \times n}$

□

4.3. Determinante de orden tres

Se aplica en esta sección el desarrollo por cofactores a determinantes de matrices de tres por tres con entradas reales.

Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si aplicamos el Teorema 4.2.5 a la primera fila de la matriz A obtenemos:

$$det(A) = a_{11}(-1)^{1+1} det(A(1|1)) + a_{12}(-1)^{1+2} det(A(1|2)) + a_{13}(-1)^{1+3} det(A(1|3))$$

Es decir que cada término consiste en el producto de un elemento de la primera fila de la matriz, por el determinante de la matriz de 2×2, que se obtiene al suprimir la primera fila de A y la columna j, $1 \leq j \leq 3$ multiplicado por $(-1)^{1+j}$. De esta forma hemos calculado el determinante de $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ conforme al desarrollo por cofactores por **primera fila**. En forma desarrollada se obtiene:

$$det(A) = a_{11}(-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.3.1 *Calcular el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

desarrollando por primera fila.

Calculemos primero $det(A(1|j))$ para $1 \leq j \leq 3$.

$$det(A(1|1)) = det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 22$$

$$det(A(1|2)) = det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4$$

$$det(A(1|3)) = det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

Según hemos visto:

$$det(A) = a_{11}(-1)^{1+1}det(A(1|1)) + a_{12}(-1)^{1+2}det(A(1|2)) + a_{13}(-1)^{1+3}det(A(1|3))$$

Obtenemos:

$$det(A) = 3(-1)^{1+1}22 + 0(-1)^{1+2}4 + (-1)(-1)^{1+3}(-1) = 67$$

Observación 4.3.2 *De forma similar, se tiene el* ***desarrollo por columnas****. Por ejemplo, si se desarrolla el determinante de A por segunda columna se obtiene:*

$$det(A) = a_{12}(-1)^{1+2}det(A(1|2)) + a_{22}(-1)^{2+2}det(A(2|2)) + a_{32}(-1)^{3+2}det(A(3|2))$$

Ejemplo 4.3.3 *Calcular el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

desarrollando por segunda columna.

Calculemos primero $det(A(i|2))$ para $1 \leq i \leq 3$.

$$det(A(1|2)) = det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4$$

$$det(A(2|2)) = det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 12$$

$$det(A(3|2)) = det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 7$$

Luego,

$$det(A) = 0(-1)^{1+2}det(A(1|2)) + 5(-1)^{2+2}det(A(2|2)) + (-1)(-1)^{3+2}det(A(3|2))$$

Remplazando obtenemos:

$$det(A) = 0(-1)4 + 5(12) + 1(7) = 67$$

Que resulta el mismo valor, que cuando se calculó desarrollándolo por primera fila.

Con las definiciones precedentes del desarrollo del determinante por filas o columnas de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ se prueba el siguiente teorema.

Teorema 4.3.4 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *entonces,* $det(A) = det(A^T)$

Demostración 4.3.5 *Sea* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *entonces,* $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$
Al desarrollar el determinante de A por primera fila se obtiene:

$$det(A) = a_{11}det(A(1|1)) - a_{12}det(A(1|2)) + a_{13}det(A(1|3)) \tag{4.1}$$

Ahora si se desarrolla el determinante de A^T *por la primer columna:*

$$det(A^T) = a_{11}det(A^T(1|1)) - a_{12}det(A^T(2|1)) + a_{13}det(A^T(3|1)) \tag{4.2}$$

Observamos que los determinantes: $det(A^T(1|j)) = det(A(j|1))$ *por ser matrices de* 2×2. *Teniendo en cuenta esta observación y comparando 4.1 y 4.2 se obtiene que:*

$$det(A) = det(A^T)$$

□

El resultado del Teorema 4.3.4 vale en general para matrices de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Teorema 4.3.6 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *entonces,* $det(A) = det(A^T)$

4.4. Determinante de un producto de matrices

En esta sección, se demostrará que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes. Los dos lemas previos resultan útiles al momento de demostrar el resultado antes mencionado. Recordemos que todas las propiedades enunciadas sobre las columnas de la matriz son válidas para las filas.

Lema 4.4.1 *Sea* $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz elemental se verifica que,*

1) *Si E es la matriz que representa la permutación de la fila i por la fila j entonces,* $det(E) = -1$.

2) *Si E es la matriz elemental que representa la multiplicación de la fila i de la matriz identidad I por un escalar* $\alpha \neq 0$ *entonces,* $det(E) = \alpha$

3) *Si E es la matriz elemental que representa la suma de la fila i, más la fila j multiplicada por un escalar entonces,* $det(E) = 1$

Demostración 4.4.2 1) *Se sabe que* $det(I) = 1$ *y que la matriz E se obtiene permutando la fila i por la fila j a partir de la matriz identidad entonces,* $det(E) = -det(I) = -1$.

2) *Puesto que E se obtiene multiplicando la fila i de la matriz identidad I por α se tiene $det(E) = \alpha det(I) = \alpha$.*

3) *E se obtiene multiplicando la fila j (de la matriz identidad) por $\alpha \neq 0$ y sumando el resultado a la fila i entonces, $det(E) = det(I) = 1$.*

$\square$

Lema 4.4.3 *Sea $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz elemental y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces,*

$$det(EB) = det(E)det(B)$$

Demostración 4.4.4 a) *Si E es una matriz de permutación entonces, $EB = B'$, la matriz B' que se obtiene es la matriz que tiene permutada la fila i de la matriz B por la fila j, de esta forma se obtiene:*

$$det(B') = -det(B) = (-1)det(B) = det(E)det(B)$$

donde se ha utilizado la parte 1) del lema anterior.

b) *Si E es la matriz elemental que representa la multiplicación de la fila i de la matriz identidad I por un escalar $\alpha \neq 0$ entonces, $EB = B'$ ahora B' es la matriz que resulta de multiplicar la fila i de la matriz B por el escalar α entonces,*

$$det(B') = \alpha det(B) = det(E)det(B)$$

Hemos utilizado la parte 2) del lema anterior.

c) *Si E es la matriz elemental que representa la suma de la fila i, más la fila j multiplicada por un escalar entonces, $EB = B'$ aquí B' es la matriz que resulta de sumar la fila i de B la fila j de B multiplicada por un escalar. Teniendo en cuenta la parte 3) del lema anterior se obtiene*

$$det(B') = det(B) = (1)det(B) = det(E)det(B)$$

$\square$

Observación 4.4.5 *Recordemos que, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible entonces, se dice **no singular**. En caso contrario se dice **singular**.*

Proposición 4.4.6 *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible (no singular) entonces, $det(A) \neq 0$*

Demostración 4.4.7 *A es invertible si y sólo si es producto de matrices elementales, es decir $A = E_1E_2...E_n$ por lo tanto,*

$$det(A) = det(E_1E_2...E_n)$$

Aplicando ahora n-veces el lema anterior obtenemos,

$$det(A) = det(E_1)det(E_2)...det(E_n) \neq 0$$

Pues E_i es elemental por lo que $det(E_i) \neq 0$ $\square$

Teorema 4.4.8 *Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces,*

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Demostración 4.4.9 *a) Supondremos que* $det(A) = det(B) = 0$
Como $det(B) = 0$ *entonces,* B *no es invertible, luego* $\exists\, X \in \mathbb{R}^{n\times 1}, X \neq 0$*, tal que,* $BX = 0$ *entonces,*

$$(AB)X = A(BX) = A0_{\mathbb{R}^{n\times 1}} = 0_{\mathbb{R}^{n\times 1}}$$

Luego AB *no es invertible entonces,* $det(AB) = 0 = 0 \cdot 0 = det(A)det(B)$

b) Supongamos que $det(A) = 0$ *y* $det(B) \neq 0$
Como $det(A) = 0$ *entonces,* A *no es invertible luego,* $\exists\, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}, Y \neq 0_{\mathbb{R}^{n\times 1}}$ *tal que* $AY = 0_{\mathbb{R}^{n\times 1}}$*. Dado que* $det(B) \neq 0$ *entonces,* B *es invertible y por lo tanto existe un único vector* $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}, X \neq 0$ *tal que* $BX = Y$ *luego,*

$$(AB)X = A(BX) = AY = 0_{\mathbb{K}^{n\times 1}}$$

Entonces, se deduce que, AB *no es invertible luego,*

$$det(AB) = 0 = 0det(B) = det(A)det(B)$$

c) Supondremos que $det(A) \neq 0$ *entonces,* A *resulta invertible y por ende se puede expresar como producto de matrices elementales, es decir:*

$$A = E_1 E_2 ... E_n$$

De esta forma se tiene que,

$$AB = (E_1 E_2 ... E_n)B = E_1(E_2 ... E_n B)$$

Usando el Lema 4.4.3, se obtiene,

$$det(AB) = det(E_1(E_2 ... E_n B)) = det(E_1)det(E_2 ... E_n B)$$

Iterando el proceso obtenemos,

$$det(AB) = det(E_1)det(E_2)...det(E_n)det(B)$$

Entonces,

$$det(AB) = \overbrace{det(E_1)det(E_2)...det(E_n)}^{det(A)}\, det(B)$$

Y obtenemos que, $det(AB) = det(A)det(B)$

□

Corolario 4.4.10 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *invertible entonces,*

$$det(A^{-1}) = (det(A))^{-1} = \frac{1}{det(A)}$$

Demostración 4.4.11 *Al ser A invertible, $\exists\, A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ entonces, aplicando el teorema anterior tenemos:*

$$det(AA^{-1}) = det(I) = 1 \Rightarrow det(A)det(A^{-1}) = 1$$

puesto que $det(A) \neq 0$ se obtiene,

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

□

Definición 4.4.12 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define la n - ésima potencia de A como,*

$$A^n = \underbrace{AA...A}_{n-veces}$$

Corolario 4.4.13 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces $det(A^n) = (det(A))^n$.*

Demostración 4.4.14 *Demostraremos utilizando inducción.*

1) Si $n = 1$ entonces, $det(A^1) = (det(A))^1$.

2) Supongamos que la propiedad es verdadera para $(n-1) \in \mathbb{N}$ y veamos que se cumple para n.

$$det(A^n) = det(A^{n-1}A) = det(A^{n-1})det(A) \underbrace{=}_{HI} (det(A))^{n-1}det(A) = (det(A))^n$$

□

4.5. Cálculo de la inversa

A continuación se verá como se puede calcular la matriz inversa de una matriz no singular de $\mathbb{R}^{n\times n}$. El método del cálculo de la inversa por medio de su matriz *adjunta* no resulta práctico para matrices de dimensiones grandes $n > 3$, pero la fórmula que se obtiene tiene implicaciones teóricas importantes.

Definición 4.5.1 *Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se define la* ***matriz de cofactores*** *de A, (y la denotaremos por $Cof(A)$), la matriz que resulta de sustituir cada posición de la matriz dada, por el cofactor correspondiente. Esto es si*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces,

$$Cof(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Definición 4.5.2 *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es como en la definición 4.5.1 entonces, Se define la **Adjunta** de A como la transpuesta de la matriz de cofactores, es decir,*

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.5.3 *Calcular la adjunta de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Calculamos la transpuesta de la matriz de cofactores, se obtiene:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Observación 4.5.4 *Al calcular el determinante de la matriz del ejemplo 4.5.3 se obtiene $det(A) = 2$.*
Cuando se calcula $Adj(A)A$ se obtiene:

$$Adj(A)A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = det(A)I_{3\times 3}$$

El ejemplo de la observación 4.5.4 enseña dos cosas: que la suma de la multiplicación de los elementos de una fila por los cofactores de otra es cero. Además el producto de la adjunta por la matriz es la matriz diagonal que tiene como elemento de la diagonal principal al determinante de la matriz. Estos hechos los formalizamos.

Lema 4.5.5 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces, la suma de los productos de los elementos de una fila de la matriz por los cofactores de los elementos correspondientes a otra fila es cero.*

Demostración 4.5.6

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Consideremos $i \neq s$, sumando la fila i con la fila s se tiene, y desarrollando por dicha fila, se obtiene,

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n}(a_{sj} + a_{ij})A_{sj} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{sj}A_{sj}}_{det(A)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj}$$

entonces, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj} = 0$ $\square$

Teorema 4.5.7 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces, $Adj(A)A = AAdj(A) = det(A)I_{n\times n}$*

Demostración 4.5.8

$$AAdj(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces,

$$AAdj(A) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{nj} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{1j} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}A_{nj} \end{pmatrix}$$

Por el Lema 4.5.5 sabemos que, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj} = 0$ *para* $i \neq s$*, mientras que* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = det(A)$ *luego,*

$$AAdj(A) = \begin{pmatrix} det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & det(A) \end{pmatrix} = det(A)I$$

la otra igualdad se demuestra de forma análoga. $\square$

Teorema 4.5.9 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*,* A *es invertible si y solo si* $det(A) \neq 0$

Demostración 4.5.10 $\Rightarrow$) *Si* A *es invertible,* $\exists\ A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que* $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ *entonces,* $det(AA^{-1}) = det(I) = 1 \Rightarrow det(A)det(A^{-1}) = 1$ *luego,* $det(A) \neq 0$

$\Leftarrow$) *Si* $det(A) \neq 0$*, por el teorema anterior se verifica*

$$A\ Adj(A) = Adj(A)A = det(A)I_{n\times n}$$

Al ser $det(A) \neq 0$ *entonces,*

$$\left(\frac{1}{det(A)}Adj(A)\right)A = A\left(\frac{1}{det(A)}Adj(A)\right) = I_{n\times n}$$

Por la unicidad de la matriz inversa se concluye que,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}Adj(A)$$

$\square$

Observación 4.5.11 *Si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es una matriz no singular, es decir* $det(A) \neq 0$*. El teorema provee un método para calcular la inversa de* A*. Como vimos,*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}Adj(A)$$

Este método para calcular la inversa es poco práctico cuando la dimensión de la matriz es grande.

Ejemplo 4.5.12 *Calcular la matriz inversa de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ *empleando el método de la matriz adjunta.*
Como el $det(A) = 2$ *esto significa que* A *es invertible. Al calcular la adjunta de esta matriz se obtuvo:*

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Capítulo 5

Autovalores y Autovectores

Dado un operador lineal $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, en general no existe una relación entre un vector no nulo $v \in \mathbb{V}$ y su transformado $T(v)$. Sin embargo puede darse el caso en que $T(v)$ sea un múltiplo escalar de v, es decir que la *dirección* de v permanezca invariante cuando se aplica el operador T. En el caso $v = 0_{\mathbb{V}}$ se cumple que $T(0_{\mathbb{V}}) = \alpha 0_{\mathbb{V}}$, $\forall \alpha$ con lo cual no aporta información acerca de las direcciones invariantes. Este capítulo está destinado al estudio de aquellos operadores lineales que dejan invariantes ciertas direcciones del espacio en el cual están definidos.

5.1. Autovalores y Autovectores de un operador lineal

Definición 5.1.1 *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real de dimensión n. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un operador lineal. Un vector* ***no nulo*** *$v \in \mathbb{V}$ es un* ***autovector*** *del operador T, asociado a λ, si para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, se cumple,*

$$T(v) = \lambda v$$

Al número real λ se lo llama ***autovalor*** *del operador T*

Ejemplo 5.1.2 *Consideremos el operador lineal $T : \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ definido por:*

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Entonces, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es ***autovector*** *de T, asociado al* ***autovalor*** *$\lambda_1 = 2$ pues,*

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Además se verifica para el operador T que el vector $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es otro ***autovector****, pero asociado al* ***autovalor*** *$\lambda_2 = 0$ pues se satisface,*

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, y consideremos $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un operador lineal. Si B es una base de $\mathbb{V}$, sabemos que el operador lineal T, tiene asociada una matriz respecto a dicha base. Supongamos que el vector no nulo $v \in \mathbb{V}$ es un autovector del operador T, asociado a $\lambda \in \mathbb{R}$ es decir,

$$T(v) = \lambda v$$

Si en esta última igualdad se toman coordenadas respecto de la base B, se obtiene,

$$[T(v)]_B = \lambda [v]_B$$

Teniendo en cuenta la propiedad de la matriz $\|T\|_B$, se concluye que,

$$\|T\|_B [v]_B = \lambda [v]_B \tag{5.1}$$

Sea $A = \|T\|_B$ la matriz de T respecto de la base B y $x = [v]_B$ entonces, la ecuación 5.1 se reescribe en la forma:

$$Ax = \lambda x$$

Es decir que el vector no nulo $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es una dirección que permanece invariante para la matriz A. Por lo que acabamos de observar vamos a construir un método para encontrar los autovalores y autovectores de matrices con entradas reales.

5.2. Autovalores y Autovectores para matrices

Definición 5.2.1 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $x \neq 0$ es un **autovector** de A, asociado al autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, si cumple,*

$$Ax = \lambda x$$

El problema que nos queda planteado es cómo encontrar los autovalores y autovectores de una matriz. El siguiente ejemplo nos permite vislumbrar como proceder en el caso general.

Ejemplo 5.2.2 *Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definida por,*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Se desea encontrar los autovalores y autovectores de de la matriz A. Planteamos la ecuación $Ax = \lambda x$ donde, $x \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ es decir,

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Esta última ecuación es equivalente a escribir:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Como se está buscando un vector no nulo $x \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ que sea solución del sistema 5.2, éste debe ser compatible indeterminado, por lo cual la matriz M, debe ser no invertible, esto es equivalente a pedir que el determinante de esta matriz es nulo. Esta última consideración nos lleva a plantear la siguiente condición:

$$det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

es decir,

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \tag{5.3}$$

La ecuación $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ puede o no tener soluciones reales (seguro tiene soluciones complejas, por ser $\mathbb{C}$ un cuerpo algebraicamente cerrado). En estas notas nos interesa encontrar autovalores reales de las matrices. El caso complejo no lo estudiaremos. La ecuación 5.3 tiene como soluciones reales, $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 3$. Para hallar los autovectores asociados a estos autovalores, se sustituye en el sitema 5.2 por los valores de λ_1 y λ_2 y se resuelve. Lo hacemos para $\lambda_1 = -2$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

este sistema es equivalente a,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $x_2 = -2x_1$ entonces,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{u_1}$$

Es decir todo múltiplo no nulo del vector u_1 es autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = -2$, por ejemplo el mismo u_1. Verificar que el vector,

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es el autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 3$.

La siguiente proposición nos da el método general para determinar autovalores y autovectores de una matriz.

Proposición 5.2.3 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con entradas reales, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) λ es un autovalor de A

b) El sistema de ecuaciones $(A - \lambda I)x = 0$ tiene solución no trivial

c) Existe un vector distinto de cero $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, tal que $Ax = \lambda x$

d) λ es una solución real de la ecuación $det(A - \lambda I) = 0$

Demostración 5.2.4 *Veamos las implicaciones:*

a) $\to$ b) Puesto que λ es autovalor de A, entonces existe $x \neq 0_{\mathbb{R}^{n\times 1}}$ tal que, verifica $Ax = \lambda x$, luego $Ax = \lambda I x$ donde, $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz identidad.
La igualdad $Ax = \lambda I x$, es equivalente a escribir $(A - \lambda I)x = 0$, puesto que $x \neq 0_{\mathbb{R}^{n\times 1}}$, este sistema lineal homogéneo tiene solución no trivial.

b) → c) *Como* $(A-\lambda I)x = 0$ *tiene solución no trivial, es posible hallar* $x \neq 0_{\mathbb{R}^{n\times 1}}$ *que satisfaga esta ecuación. Entonces* $(A-\lambda I)x = 0 \Leftrightarrow Ax = \lambda x$.

c) → d) *Se sabe que existe* $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ *no nulo, tal que,* $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda I)x = 0$. *Como* $x \neq 0_{\mathbb{R}^{n\times 1}}$, *el sistema lineal homogéneo tiene solución no trivial, lo que indica que la matriz* $A-\lambda I$ *es no invertible o equivalentemente, su determinante se anula,* $det(A-\lambda I) = 0$. *El valor* $\lambda \in \mathbb{R}$, *es una solución real de la ecuación planteada de la ecuación* $det(A-\lambda I) = 0$.

d) → a) *Se tiene que* λ *es una solución real de la ecuación* $det(A-\lambda I) = 0$, *esto dice que la matriz* $(A-\lambda I)$ *no es invertible, y por ende, existe un vector* x *distinto del vector nulo, que es solución del sistema* $(A-\lambda I)x = 0$. *La última ecuación es equivalente a pedir que* $Ax = \lambda x$ *y por definición resulta que,* λ *es un autovalor de* A.

□

Observación 5.2.5 *1) Siempre que* A *sea una matriz* $n \times n$ *con entradas reales, al desarrollar* $det(A-\lambda I)$ *se obtiene un polinomio mónico de grado* n *con coefientes reales. Al polinomio* $P(\lambda) = det(A-\lambda I)$ *se lo denomina* ***Polinomio Característico*** *de* A *y a sus raíces se las denominan* ***Raíces Características****. Estas definiciones siguen siendo válidas cuando el cuerpo es el de los números complejos.*

2) La ecuación $det(A-\lambda I) = 0$ *se denomina* ***Ecuación Característica*** *de la matriz* A.

Ejemplo 5.2.6 *Dada* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, 3x_3)$$

Encontremos los autovalores y los autovectores de T. *Consideremos la base canónica de* $\mathbb{R}^3$, $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, *luego la expresión matricial del operador esta dada por:*

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\|T\|_E = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es la matriz asociada a T *en la base* E. *La ecuación característica para* A *viene dada por:*

$$det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

es decir,

$$(3-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] = 0$$

Al desarrollar el primer miembro de la última igualdad se obtiene un polinomio de grado tres. Las soluciones de la ecuación característica son: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. *Así* 3 *resulta raíz de multiplicidad* 2 *y* 1 *es raíz simple. Para hallar los autovectores planteamos el sistema:*

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con $\lambda_1 = 3$ *resulta el siguiente sistema homogéneo*

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Triangulando la matriz asociada al sistema, se obtiene el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución al sistema de ecuaciones lineales es: $x_1 = x_2$ *y* x_3 *es variable libre. Si se toma* $x_3 = 0$ *se obtiene el autovector:*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $x_3 = 1$*, entonces, se obtiene otro autovector:*

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Ahora, si consideramos $\lambda_1 = 1$*, el sistema de ecuaciones resulta:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Triangulando resulta el siguiente sistema equivalente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema de ecuaciones lineales es: $x_1 = -x_2$ *y* $x_3 = 0$*, entonces,*

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así los autovectores asociados a los autovalores $\lambda_1 = 3$*,* $\lambda_2 = 3$ *y* $\lambda_3 = 1$ *son:*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se puede verificar que estos 3 vectores son linealmente independientes por lo que forman una base de $\mathbb{R}^3$*.*

Ejemplo 5.2.7 *Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de polinomios de grado menor o igual que dos a coeficientes reales. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definida por:*

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = 2a_0 + (-a_0 + 3a_1)t + (a_1 + a_2)t^2$$

Se pide encontar los autovalores y los autovectores de T. Consideremos la base $B = \{1,\ t,\ t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$, la matriz de T en esta base es:

$$A = \|T\|_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ es un autovector de T, asociado al autovalor λ, se verifica,

$$\|T\|_B [p]_B = \lambda [p]_B$$

entonces,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Es decir que el problema se reduce a encontrar los autovalores y autovectores de la matriz A. Procediendo como en el Ejemplo 5.2.6 se obtienen:

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$$

y además,

$$[p_1]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [p_2]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [p_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$p_1 = t^2 \quad p_1 = 1 + t + t^2 \quad p_1 = 2t + t^2$$

son los autovectores de T. En este caso también se puede comprobar que el conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ es linealmente independiente, es decir, constituye una base para el espacio de polinomios de grado menor o igual que dos.

Vimos cómo calcular los autovalores y autovectores de una matriz dada. Por la parte c) de la Proposición 5.2.3 los autovectores de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, correspondiente al autovalor λ son las soluciones no nulas del sistema $(A - \lambda I)x = 0$. Ahora bien el espacio solución de este sistema de ecuaciones (sabemos que es un subespacio de $\mathbb{R}^{n\times 1}$), es llamado **Autoespacio** de la matriz A correspondiente al autovalor λ. Es decir,

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} :\ (A - \lambda I)x = 0\}$$

Es de observar que la dimensión de este subespacio no siempre coincide con la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico a la cual denominaremos **multiplicidad aritmética**. Llamamos **multiplicidad geométrica** del autovalor λ a la dimensión del autoespacio E_λ. Se puede demostrar que en general la multiplicidad geométrica es menor o igual que la multiplicidad aritmética.

5.3. Diagonalización

Nos preguntamos:

i) ¿Para un operador lineal T, el polinomio característico siempre tendrá la misma forma, independientemente de la base que se elija para expresar su matriz asociada? Volveremos sobre esta pregunta en el Capítulo 7.

ii) ¿Siempre es posible encontrar una base de autovectores del espacio de partida para un operador lineal T, o bien para su matriz asociada respecto de una base? Esta cuestión es desarrollada en la presente sección.

Definición 5.3.1 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la matriz A se dice diagonalizable, si existe una matriz invertible $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $P^{-1}AP = D$ es una matriz diagonal. En tal caso se dice que P diagonaliza a A.*

El problema de diagonalización de matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ está intimamente relacionado con el problema de encontrar los autovalores reales y autovectores de dicha matriz. Esto se ilustra en la siguiente proposición:

Proposición 5.3.2 *Si A es una matriz de $n \times n$ con entradas reales entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) A es diagonalizable.

b) A tiene n autovectores linealmente independientes.

Demostración 5.3.3 *Veamos*

a) $\to$ b) Como A es diagonalizable existe una matriz invertible P tal que $D = P^{-1}AP$ de esta igualdad se obtiene $AP = PD$. Haciendo explicita esta expresión se tiene:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad y \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$AP = PD = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{pmatrix}$$

Si se denota por $P_1 ... P_n$, las columnas de la matriz P entonces, las columnas de AP son iguales a $\lambda_1 P_1, ..., \lambda_n P_n$, y por la cuenta realizada antes se tiene:

$$AP_1 = \lambda_1 P_1, \ , AP_2 = \lambda_2 P_2, ..., AP_n = \lambda_n P_n$$

Puesto que la matriz P es invertible entonces, sus columnas son distintas de cero, y cada columna P_j, $j = 1, \cdots, n$ es un autovector de A asociado a un autovalor λ_j. Por ser P invertible sus columnas son linealmente independientes, es decir, la matriz A tiene n autovectores linealmente independientes.

b) $\to$ *a)* *Sean* $P_1, P_2, ..., P_n$*, los* n *autovectores de la matriz* A *entonces, la matriz* $P = (P_1P_2...P_n)$ *es invertible (pues los vectores* $P_1, P_2, ..., P_n$ *son linealmente independientes) y se cumple:*

$$(AP_1AP_2...AP_n) = (\lambda_1P_1, \lambda_2P_2, ..., \lambda_nP_n)$$

Que es equivalente a decir:

$$AP = PD$$

donde,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Puesto que P *es invertible se cumple* $D = P^{-1}AP$*. Así la matriz* A *resulta diagonalizable.*

$\square$

Observación 5.3.4 *Si una matriz es diagonalizable entonces, la Proposición 5.3.2 nos enseña como diagonalizar dicha matriz. El procedimiento es como sigue:*

1) *Se encuentran los* n *autovectores* $P_1, P_2, ..., P_n$ *linealmente independientes de la matriz* A*.*

2) *Se escribe la matriz* P *que tenga a los vectores* P_j *como columnas.*

3) *Luego,* $D = P^{-1}AP$ *es la matriz diagonal, que tiene como elementos en la diagonal principal a* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *que son los autovalores de* A *.*

Veamos un ejemplo para desarrollar el método de diagonalización.

Ejemplo 5.3.5 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *definida por,*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En el Ejemplo 5.2.2 hemos calculado los autovalores y autovectores de esta matriz resultando:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

el autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = -2$ *y*

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es el autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 3$*. Ahora construimos la matriz* P*, como indica la observación 5.3.4,*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz P *es,*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Entonces se verifica que,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Es decir que la matriz A es semejante a una matriz diagonal y por lo tanto diagonalizable. Observar que en la matriz diagonal aparecen los autovalores de A.

Observemos que, la diagonalización de una matriz depende de encontrar una base de autovectores para poder construir la matriz P que diagonaliza la matriz dada. La proposición 5.3.6 nos enseña que: A autovalores distintos les corresponden autovectores linealmente independientes.

Proposición 5.3.6 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si $v_1, ..., v_k$ con $k \leq n$ son autovectores de A correspondiente a los autovalores* ***distintos****, $\lambda_1, ..., \lambda_k$ entonces, $\{v_1, ..., v_k\}$ es linealmente independiente.*

Demostración 5.3.7 *La demostración la haremos por el absurdo. Supondremos que $v_1, ..., v_k$ son vectores linealmente dependientes que corresponden a autovalores distintos $\lambda_1, ..., \lambda_k$.*
Por ser v_1 autovector de A, es distinto del vector nulo, por lo tanto $\{v_1\}$ es linealmente independiente. Sea r el entero más grande tal que $\{v_1, .., v_r\}$ es linealmente independiente. Como se ha supuesto a $v_1, ..., v_k$ linealmente dependiente y r es tal que $1 \leq r \leq k$, luego por la elección de r resulta que $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}\}$ es linealmente dependiente. Por lo tanto existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha_{r+1}$, no todos nulos, tales que:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} = 0$$

Multiplicando ambos miembros por la matriz A se obtiene:

$$\alpha_1 A v_1 + ... + \alpha_r A v_r + \alpha_{r+1} A v_{r+1} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \lambda_1 v_1 + ... + \alpha_r \lambda_r v_r + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \tag{5.4}$$

Si multiplicamos a $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} = 0$ por el autovalor λ_{r+1} se tiene

$$\alpha_1 \lambda_{r+1} v_1 + ... + \alpha_r \lambda_{r+1} v_r + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1} = 0 \tag{5.5}$$

Si restamos las ecuaciones 5.4 y 5.5 obtenemos

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) v_1 + ... + \alpha_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) v_r = 0 \tag{5.6}$$

Puesto que $\{v_1, ..., v_r\}$ es linealmente independiente, de la ultima ecuación se desprende que: $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1}) = 0, ..., \alpha_r(\lambda_r - \lambda_{r+1}) = 0$ y como todos los autovalores de A son distintos obtenemos que $\alpha_1 = 0, ..., \alpha_r = 0$.
Ahora si remplazamos estos valores en $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} = 0$ se tiene ,

$$\alpha_{r+1} v_{r+1} = 0$$

puesto que $v_{r+1} \neq 0$, se tiene que $\alpha_{r+1} = 0$.
Esto contradice el hecho de que los escalares $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha_{r+1}$ no son todos nulos. Luego $v_1, ..., v_k$ son linealmente independientes. $\square$

El siguiente Corolario es una consecuencia inmediata de la Proposición 5.3.6.

Corolario 5.3.8 *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene n autovalores distintos entonces, la matriz A es diagonalizable.*

Demostración 5.3.9 *Si $v_1, ..., v_n$ son "n" autovectores, correspondientes a los "n" autovalores distintos, ellos son linealmente independientes. Luego, por la Proposición 5.3.2, la matriz A es diagonalizable.* $\square$

El Corolario 5.3.8 no resuelve el problema de diagonalización cuando los autovalores son raíces múltiples del polinomio característico. Habíamos observado que en general la multiplicidad geométrica es menor o igual que la multiplicidad aritmética. Se puede demostrar que la matriz A resulta diagonalizable si las multiplicidades aritméticas y geométricas coinciden para cada uno de los autovalores de la matriz A. Veamos dos ejemplos que ilustren este hecho.

Ejemplo 5.3.10 *Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Según lo desarrollado en el Ejemplo 5.2.6, se encontró que, $\lambda = 3$ es raíz de multiplicidad 2 del polinomio característico y $\mu = 1$ es raíz simple. Al calcular los autovectores correspondientes a estos autovalores se tiene,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir que hay 3 autovectores linealmente independientes y por lo tanto la matriz A es diagonalizable. En este caso la multiplicidad aritmética y geométrica tanto para $\lambda = 3$ como para $\mu = 1$ coinciden.

Ejemplo 5.3.11 *Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La ecuación característico de la matriz A resulta,

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 = 0$$

con lo cual $\lambda = 2$ es raíz doble del polinomio característico y $\mu = 1$ es raíz simple. Pero el autoespacio correspondiente a $\lambda = 2$ está generado por el vector:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo cual la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ es 1 y no coincide con la multiplicidad geométrica. En este caso no es posible encontrar una base de autovectores y por lo tanto A no es diagonalizable.

5.4. Potencias de matrices

Si se tiene una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en general no es sencillo encontrar la potencia A^m de la matriz. Sin embargo cuando la matriz A es diagonalizable la potencia m puede ser hallada de forma más fácil. Este hecho se demuestra en la siguiente proposición:

Proposición 5.4.1 *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable entonces,*

$$A^m = PD^mP^{-1} \ \forall m \in \mathbb{N}$$

Demostración 5.4.2 *La demostración es por inducción sobre m. Si $m = 1$, por hipótesis sabemos que A es diagonalizable luego, existe una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que, $P^{-1}AP = D$, es decir, $A = PDP^{-1}$.*
Supongamos que la afirmación es cierta para $m = k$ y veamos que se cumple para $m = k+1$,

$$A^{k+1} = A^kA = (PD^kP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^kDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1}$$

Por el principio de inducción la afirmación es verdadera $\forall m \in \mathbb{N}$ $\square$

El siguiente ejemplo muestra como calcular una potencia de una matriz diagonalizable.

Ejemplo 5.4.3 *Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^5. Se deja como ejercicio demostrar que A es diagonalizable y que se verifica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ -211 & 243 & 0 \\ -90 & 121 & 1 \end{pmatrix}$$

Capítulo 6

Espacio Dual

Un caso particular de transformaciones lineales son las **formas lineales**. El concepto de forma lineal ayuda al estudio de los subespacios, los sistemas de ecuaciones lineales y las coordenadas.

6.1. El espacio dual de un espacio vectorial

Definición 6.1.1 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, la aplicación linal que a cada vector $v \in \mathbb{V}$, le asigna un escalar $\varphi(v) \in \mathbb{K}$, se la denomina **forma lineal** o **funcional lineal** es decir que φ verifica:*

1. *Si $u, v \in \mathbb{V}$ entonces,*

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

2. *Si $v \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces*

$$\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$$

Ejemplo 6.1.2 1. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{V}$, $u = (x_1, \cdots, x_n)$ y $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, los números reales a_i, $i = 1, \cdots, n$ están fijos, se define:*

$$\varphi(u) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

Se deja como ejercicio verificar que φ es una funcional lineal.

2. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{n\times n}$, es decir el espacio de matrices de entradas reales de $n \times n$, consideremos $u \in \mathbb{R}^{n\times n}$*

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

*Recordemos que la **traza** de u se define como,*

$$tr(u) = \sum_{i=1}^{n} u_{ii}$$

Comprobemos que $\varphi(u) = tr(u)$ es una funcional lineal. Para ello sean $u, v \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces,

$$\varphi(\alpha u+v) = tr(\alpha u+v) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha u_{ii}+v_{ii}) = \alpha\sum_{i=1}^{n} u_{ii}+\sum_{i=1}^{n} v_{ii} = \alpha tr(u)+tr(v) = \alpha\varphi(u)+\varphi(v)$$

Así $\varphi(u) = tr(u)$ resulta una funcional lineal.

Definición 6.1.3 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, al espacio vectorial de todas las formas lineales de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{K}$, se lo denomina* ***Espacio Dual*** *de $\mathbb{V}$, esto es,*

$$\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{K}) = \{\varphi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K},\ \varphi\ es\ una\ forma\ lineal\}$$

Al espacio dual de $\mathbb{V}$ lo denotamos por $\mathbb{V}^*$. Con esta notación se tiene, $\mathbb{V}^* = \mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{K})$

Ejercicio 6.1.4 *Desmostar que $\mathbb{V}^* = \mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{K})$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

Observación 6.1.5 *Puesto que $\mathbb{V}^*$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, el mismo está dotado con todos los atributos que se estudian para los espacios vectoriales en general, por ende se puede hablar de conjunto de generadores, base y dimensión de $\mathbb{V}^*$. Ahora se construirá una base de $\mathbb{V}^*$ para el caso en que $\mathbb{V}$ sea de dimensión finita.*

6.1.1. Formas coordenadas

Definición 6.1.6 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Sean las funcionales lineales $\gamma_i : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ definidas por:*

$$\gamma_i(v_j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

Para $i, j = 1, \cdots, n$. A las funcionales lineales $\gamma_i,\ i = 1, \cdots, n$ se las denominan ***formas coordenadas*** *de B.*

Observación 6.1.7 *El nombre de formas coordenadas con que se las designa a las γ_i para $i = 1, \cdots, n$ se deriva del siguiente hecho. Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$, dado $v \in \mathbb{V}$, este vector se escribe de forma única como:*

$$v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$$

Considerando las γ_i como en la definición 6.1.6, entonces al aplicar esta forma al vector, su transformado es:

$$\gamma_i(v) = x_1\gamma_i(v_1) + \cdots + x_i\gamma_i(v_i) + \cdots + x_n\gamma_i(v_n) = x_i$$

Esto último dice que al aplicar la forma coordenada γ_i a v, devuelve la i-ésima coordenada del vector respecto a la base B.

El siguiente Teorema asegura la existencia y unicidad de las bases duales.

Teorema 6.1.8 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial de dimensión finita. Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Entonces existe una única* ***base dual*** *$B^* = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ de $\mathbb{V}^*$ tal que, $\gamma_i(v_j) = \delta_{ij}$. Además,* *1. Cada funcional lineal φ sobre $\mathbb{V}$ se escribe en la forma:*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i)\gamma_i \tag{6.1}$$

2. Si $v \in \mathbb{V}$ entonces,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(v)v_i \tag{6.2}$$

Demostración 6.1.9 *Para ver que existe una única base **dual**, observemos que, al ser $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ entonces, para cada $i = 1, \cdots, n$, existe una única transformación lineal (forma lineal) $\gamma_i : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ tal que:*

$$\gamma_i(v_j) = \delta_{ij}$$

Se obtiene así un conjunto de n funcionales lineales distintas $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ sobre $\mathbb{V}$. Además este conjunto de funcionales es linealmente independiente pues,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i = 0$$

entonces,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i\right)(v_j) = 0_{funcional\ nula}(v_j)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i(v_j) = 0$$

$$a_i = 0,\ \forall i = 1, \cdots, n$$

Esto demuestra que $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ es linealmente independiente. Veamos que $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ es conjunto de generadores de $\mathbb{V}^*$, para ello, sea $\omega \in \mathbb{V}^*$, queremos ver si existen escalares $a_i \in \mathbb{K}$ tales que,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i$$

luego,

$$\omega(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i(v_j)$$

entonces, $\omega(v_j) = a_j$. Esto nos dice que $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ es conjunto de generadores de $\mathbb{V}^*$. De esta forma $B^* = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ de $\mathbb{V}^*$. Además se tiene que, $dim(\mathbb{V}^*) = n$.

1. *Sea φ una funcional lineal sobre $\mathbb{V}$, como $B^* = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ es base de $\mathbb{V}^*$ entonces, φ se escribe como combinación lineal de los elementos de B^* con escalares $\varphi(v_j) = a_j$ y por lo tanto,*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi(v_j)\gamma_j$$

2. *Si $v \in \mathbb{V}$ entonces, $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$. Aplicando γ_i a v obtenemos, $\gamma_i(v) = x_i$ (ver Observación 6.1.7), por lo tanto,*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(v)v_i$$

□

Observación 6.1.10 *Observemos que, si $\varphi \in \mathbb{V}^*$, aplicando la fórmula 6.1, se tiene,*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i)\gamma_i$$

Por otro lado, si $v \in \mathbb{V}$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_iv_i$$

Aplicando φ a esta última igualdad y teniendo en cuenta que, $\varphi(v_i) = a_i$ entonces,

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i \tag{6.3}$$

La ecuación 6.3 nos dice que si $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ y $[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ entonces, las formas lineales de $\mathbb{V}^*$ vienen dadas por la ecuación 6.3. Esto generaliza la parte 1 del Ejemplo 6.1.2.

6.2. Anulador

En esta sección nos proponemos estudiar la relación, entre las funcionales lineales definidas sobre un dado espacio vectorial $\mathbb{V}$ y subespacios del mismo espacio vectorial. Si consideramos un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\mathbb{V}$ de dimensión n. Dada una funcional lineal (no nula) $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ entonces, por el teorema de la dimensión,

$$dim(Im(\varphi)) = 1$$
$$dim(ker(\varphi)) = n - 1$$

A los subespacio de dimensión $n - 1$ en un espacio vectorial de dimensión n, se denominan **hiperplanos** o subespacios de **codimensión** 1.

Definición 6.2.1 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial de dimensión finita. Sea S un subconjunto de $\mathbb{V}$. Al conjunto formado por todas las funcionales lineales $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ que se anulan sobre S, se lo denomina el* ***anulador*** *de S y se denota por S° esto es,*

$$S^\circ = \{\varphi \in \mathbb{V}^* : \varphi(v) = 0, \ \forall v \in S\}$$

Ejercicio 6.2.2 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial de dimensión finita.*

1. *Demostar que todo* ***hiperplano*** *es el espacio nulo (núcleo) de una funcional lineal.*
2. *Sea S un subconjunto de $\mathbb{V}$ entonces, S° es un subespacio de $\mathbb{V}$*
3. *Sea $S = \{0_{\mathbb{V}}\}$ entonces, $S^\circ = \mathbb{V}^*$*
4. *Sea $S = \mathbb{V}$ entonces, $S^\circ = \{0_{\mathbb{V}^*}\}$*

Teorema 6.2.3 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial de dimensión finita y $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$. Entonces,*

$$dim(\mathbb{W}) + dim(\mathbb{W}^\circ) = dim(\mathbb{V})$$

Demostración 6.2.4 *Supongamos que $dim(\mathbb{V}) = n$ y $dim(\mathbb{W}) = r$. Sea $\{v_1, \cdots, v_r\}$ una base de $\mathbb{W}$ completamos este conjunto a una base de $\mathbb{V}$ con los vectores $\{v_{r+1}, \cdots, v_n\}$, de esta forma $B = \{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$. Consideremos $B^* = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_n\}$ la base de $\mathbb{V}^*$ que es la dual de B. Demostraremos que $\{\gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_n\}$ es base de $\mathbb{W}^\circ$. Para ello observemos que,*

$$\gamma_i(v_j) = \delta_{ij}$$

Por lo tanto, $\gamma_i(v_j) = \delta_{ij} = 0$ si $i = r+1, \cdots, n$ y $j = 1, \cdots, r$, esto nos dice que las formas lineales se anulan en los vectores que generan $\mathbb{W}$. Si $v \in \mathbb{W}$ entonces, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$ aplicando γ_i $(i = r+1, \cdots, n)$ al vector v se obtiene,

$$\gamma_i(v) = \alpha_1\gamma_i(v_1) + \cdots + \alpha_r\gamma_i(v_r) = 0, \ \forall \ r+1 \leq i \leq n$$

Esta última igualdad nos dice que, $\gamma_i \in \mathbb{W}^\circ$, es más $\{\gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_n\}$ es un conjunto de generadores de $\mathbb{W}^\circ$ pues, si $\omega \in \mathbb{V}^*$ entonces,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(v_i)\gamma_i$$

si suponemos que además $\omega \in \mathbb{W}^\circ$ se tiene, $\omega(v_i) = 0$ para $i = 1, \cdots, r$ y por lo tanto,

$$\omega = \sum_{i=r+1}^{n} \omega(v_i)\gamma_i$$

Como además $\{\gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_n\}$ es linealmente independiente entonces, $\{\gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_n\}$ es base de $\mathbb{W}^\circ$. Se ha demostrado que , $dim(\mathbb{W}^\circ) = n - r$ y por lo tanto, se verifica la igualdad, $dim(\mathbb{W}) + dim(\mathbb{W}^\circ) = dim(\mathbb{V})$ $\square$

Corolario 6.2.5 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial de dimensión n y $\mathbb{W}$ un subespacio de $\mathbb{V}$, $dim(\mathbb{W}) = r$. Entonces, el subespacio $\mathbb{W}$ es la intersección de $n - r$ hiperplanos de $\mathbb{V}$.*

Demostración 6.2.6 *Sea* $\{v_1, \cdots, v_r\}$ *una base de* $\mathbb{W}$ *completamos este conjunto a una base de* $\mathbb{V}$*:* $B = \{v_1, \cdots, v_r, v_{r+1}, \cdots, v_n\}$*. Consideremos* $B^* = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_n\}$ *la base de* $\mathbb{V}^*$ *que es la dual de* B*. Con esta elección resulta,* $\gamma_i(v_j) = \delta_{ij} = 0$ *si* $i = r+1, \cdots, n$ *y* $j = 1, \cdots, r$*. Por lo tanto si* $v \in \mathbb{W}$ *entonces,* $\gamma_i(v) = 0$ *para* $i = r+1, \cdots, n$*, esto dice que,*

$$\mathbb{W} = \{v \in \mathbb{V} : \gamma_{r+1}(v) = 0, \cdots, \gamma_n(v) = 0\}$$

es decir que, $\mathbb{W}$ *resulta la intersección de* $n-r$ *hiperplanos de* $\mathbb{V}$ $\square$

Observación 6.2.7 *El Corolario 6.2.5 nos dice que fijada una base del espacio vectorial* $\mathbb{V}$*, un subespacio de dimensión* r*, es el conjunto solución de* $n-r$ *ecuaciones homogéneas.*

Corolario 6.2.8 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *- espacio vectorial de dimensión* n*. Sean* $\mathbb{W}_1$ *y* $\mathbb{W}_2$ *subespacios de* $\mathbb{V}$*. Entonces,*

$$\mathbb{W}_1 = \mathbb{W}_2 \Leftrightarrow \mathbb{W}_1^\circ = \mathbb{W}_2^\circ$$

Demostración 6.2.9 $\Rightarrow$*) Si* $\mathbb{W}_1 = \mathbb{W}_2$*, se deja como ejercicio ver que,* $\mathbb{W}_1^\circ = \mathbb{W}_2^\circ$*.*
$\Leftarrow$*) Supongamos que* $\mathbb{W}_1 \neq \mathbb{W}_2$ *entonces, existe un vector* $v \in \mathbb{W}_1$ *y tal que,* v *no pertenece a* $\mathbb{W}_2$ *(o bien, existe* $v \in \mathbb{W}_2$ *y tal que,* v *no pertenece a* $\mathbb{W}_1$*). Por el Corolario 6.2.5 existe una funcional lineal* φ *tal que,* $\varphi(w) = 0$ *para todo* $w \in \mathbb{W}_2$ *y* $\varphi(v) \neq 0$*. Entonces,* $\varphi \in \mathbb{W}_2^\circ$ *pero,* φ *no está en* $\mathbb{W}_1^\circ$*, absurdo. Luego* $\mathbb{W}_1 = \mathbb{W}_2$ $\square$

6.3. Sistemas de Ecuaciones Lineales y Funcionales Lineales

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

Al cual se le desea encontrar el conjunto solución en $\mathbb{R}^n$. Sean las funcionales lineales:

$$\omega_i(x_1, \cdots, x_n) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n, \ i = 1, \cdots, m$$

Con la notación precedente se busca el subespacio de $\mathbb{R}^n$ definido por:

$$\mathbb{W} = \{v = (x_1, \cdots, x_n) : \ \omega_i(v) = 0, \ i = 1, \cdots, m\}$$

Es decir $\mathbb{W}$ es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ anulado por $\omega_1, \cdots, \omega_m$. El método de eliminación de Gauss brinda una eficiente forma de encontrar el subespacio $\mathbb{W}$. Al considerar la matriz asociada al sistema 6.4, cada fila de esta matriz, $(a_{i1} \cdots a_{in})$ representa las coordenadas de la funcional ω_i respecto de la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.
Podemos considerar el sistema de ecuaciones 6.4 desde el siguiente punto de vista. Supongamos que se dan m vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$\omega_i = (a_{i1} \cdots a_{in}), \ i = 1, \cdots, m$$

El problema que nos planteamos ahora es hallar el anulador del subespacio generado por estos vectores. Sabemos por el ejemplo 6.1.2 que cualquier funcional lineal sobre $\mathbb{R}^n$ es de la forma:

$$\omega(x_1, \cdots, x_n) = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$$

la condición de que ω se encuentre en el anulador del generado por $(a_{i1} \cdots a_{in}),\ i = 1, \cdots, m$, viene dada por,

$$a_{i1}b_1 + \cdots + a_{in}b_n = 0,\ i = 1, \cdots, m$$

es decir que $(b_1 \cdots b_n)$ es solución del sistema $AX = 0$, donde $A = (a_{ij})$.

Ejemplo 6.3.1 *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^5$ y el subespacio de $\mathbb{R}^5$ definido por;*

$$\mathbb{W} = gen\{(1, 1, 0, 0, 0), (1, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 1)\}$$

Se pide encontrar un sistema de ecuaciones que defina a $\mathbb{W}$. Para ello observemos que el problema se traduce en encontrar el anulador de $\mathbb{W}$, esto es, encontrar las formas lineales en $\mathbb{V}^* = (\mathbb{R}^5)^*$ tales que, se anulan sobre $\mathbb{W}$. Se verifica que $dim(\mathbb{W}) = 3$ por lo tanto, $dim(\mathbb{W}^\circ) = 2$. Puesto que, cualquier funcional lineal sobre $\mathbb{R}^5$ es de la forma:

$$\omega(x_1, \cdots, x_5) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5$$

la condición de que ω se encuentre en el anulador de $\mathbb{W}$, se debe cumplir que,

$$\begin{gathered}\omega(1, 1, 0, 0, 0) = b_1 + b_2 = 0\\ \omega(1, -1, 1, 0, 0) = b_1 - b_2 + b_3 = 0\\ \omega(0, 0, 0, 1, 1) = b_4 + b_5 = 0\end{gathered}$$

de donde se deduce:

$$\begin{aligned}b_2 &= -b_1\\ b_3 &= -2b_1\\ b_5 &= -b_4\end{aligned}$$

es decir que a ω la podemos expresar como,

$$\omega(x_1, \cdots, x_5) = b_1x_1 - b_1x_2 - 2b_1x_3 + b_4x_4 - b_4x_5$$

o equivalentemente,

$$\omega(x_1, \cdots, x_5) = b_1(x_1 - x_2 - 2x_3) + b_4(x_4 - x_5)$$

esto nos dice que $\omega \in gen\{x_1 - x_2 - 2x_3, x_4 - x_5\}$. Luego un sistema de ecuaciones que define a $\mathbb{W}$ viene dado por,

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\\ x_4 - x_5 = 0\end{array}\right.$$

Capítulo 7

Invariantes bajo semejanza

7.1. Introducción

Recordemos que dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se dicen semejantes y escribimos $A \sim B$ si y solo si existe una matriz H invertible tal que, $B = HAH^{-1}$. Si en la ecuación $B = HAH^{-1}$, aplicamos determinante a ambos lado de la igualdad, se deduce que, $det(B) = det(A)$. Esto nos dice que el número $det(A)$ no cambia bajo la semejanza. Se dirá en tal caso, que el determinante es *invariante.*

En general se entenderá por invariante a aquella propiedad que se enmarque dentro de la siguiente definición:

Definición 7.1.1 *Se dice que una propiedad de las matrices cuadradas es* ***invariante*** *bajo semejanza, si tal propiedad es compartida por dos matrices semejantes cualesquiera.*

7.2. Invariantes bajo semejanza

En esta sección se estudiarán algunos invariantes bajo semejanza para operadores lineales $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, donde $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimension finita.

Proposición 7.2.1 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimension finita, sea B base de $\mathbb{V}$. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un operador lineal entonces, el determinante de la matriz $\|T\|_B$ es independiente de la base B elegida para calcularlo.*

Demostración 7.2.2 *Sean las bases B y B' de $\mathbb{V}$ y consideremos el diagrana,*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_B \arrow[r, "\|T\|_B"] \arrow[d, "C(B,B')"'] & \mathbb{V}_B \arrow[d, "C(B,B')"] \\
\mathbb{V}_{B'} \arrow[r, "\|T\|_{B'}"] & \mathbb{V}_{B'}
\end{tikzcd}$$

de donde se desprende que,

$$\|T\|_{B'} = C(B, B')\|T\|_B C^{-1}(B, B') \tag{7.1}$$

Es decir, $\|T\|_B \sim \|T\|_{B'}$. De la igualdad 7.1 se obtiene,

$$det(\|T\|_{B'}) = det(C(B, B'))det(\|T\|_B)det(C^{-1}(B, B'))$$

es decir, $det(\|T\|_{B'}) = det(\|T\|_B)$, como queríamos demostrar. $\square$

Observación 7.2.3 *En la proposición anterior se observa que, siempre que se tenga un operador lineal $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ y dos bases B y B' de $\mathbb{V}$. Entonces las matrices asociadas en las respectivas bases resultan semejantes es decir, $\|T\|_B \sim \|T\|_{B'}$. Luego el determinante resulta un invariante bajo semejanza.*
El valor del $det(\|T\|_B)$ no depende de la base B particular que se utilice para calcularlo. Es decir que es una propiedad que es inherente al operador lineal T, en tal caso se habla del ***determinante del operado lineal*** *y se escribe $det(T)$ sin explicitar la base B utilizada para determinarlo.*

Corolario 7.2.4 *Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un operador lineal, donde $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimension finita. Sea B una base de $\mathbb{V}$. Entonces, la invertibilidad de la matriz $\|T\|_B$ es independiente de la base B.*

Demostración 7.2.5 *Sean las bases B y B' de $\mathbb{V}$ como en la Proposición 7.2.1, de acuerdo a dicha proposición se tiene,*

$$det(\|T\|_{B'}) = det(\|T\|_B)$$

Ahora bien, la matriz $\|T\|_B$ es invertible si y sólo si, $det(\|T\|_B) \neq 0$, por lo tanto, $det(\|T\|_{B'}) \neq 0$ es decir que, la matriz $\|T\|_{B'}$ es invertible. $\square$

Recordemos que la traza de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ está definida por,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

es decir que la traza es la suma de los elementos de la diagonal. El siguiente Lema nos enseña que la traza de un producto de matrices cuadradas es independiente del orden en que se realice el producto.

Lema 7.2.6 *Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces,*

$$tr(A.B) = tr(B.A)$$

Demostración 7.2.7 *Consideremos $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces,*

$$tr(A.B) = \sum_{k=1}^{n}(A.B)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} a_{kt}b_{tk} = \sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{tk}a_{kt} = \sum_{t=1}^{n}(B.A)_{tt} = tr(B.A)$$

$\square$

Proposición 7.2.8 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimension finita, sea B base de $\mathbb{V}$. Y sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un operador lineal entonces, la traza de la matriz $\|T\|_B$, es independiente de la base B elegida para calcularla.*

Demostración 7.2.9 *Sean las bases B y B' de $\mathbb{V}$ como en la Proposición 7.2.1 y de acuerdo a la ecuación 7.1 se tiene,*

$$\|T\|_{B'} = C(B, B')\|T\|_B C^{-1}(B, B')$$

de donde,

$$tr(\|T\|_{B'}) = tr\left(C(B,B')\|T\|_B C^{-1}(B,B')\right)$$

Aplicando la propiedad del Lema 7.2.6 podemos escribir:

$$\begin{array}{rcl} tr(\|T\|_{B'}) & = & tr((C(B,B')\|T\|_B)C^{-1}(B,B')) \\ & = & tr((\|T\|_B C(B,B'))C^{-1}(B,B')) \\ & = & tr(\|T\|_B(C(B,B')C^{-1}(B,B')) \\ & = & tr(\|T\|_B I) \\ & = & tr((\|T\|_B) \end{array}$$

De esta forma resulta, $tr(\|T\|_{B'}) = tr(\|T\|_B)$ $\square$

Observación 7.2.10 *Por la Proposición 7.2.8, el valor de* $tr(\|T\|_B)$ *no depende de la base* B *elegida para calcular dicha traza. Por ello hablamos de la* ***traza del operado lineal*** *y se denota por* $tr(T)$*, sin especificar la base utilizada.*

7.3. Polinomio característico y autovalores

Hemos estudiado que a cada operador lineal le podemos asociar un polinomio. Este polinomio se calcula a partir de la matriz asociada al operador lineal respecto de una dada base. La pregunta que surge naturalmente es si el cálculo del polinomio característico depende de la base elegida. La respuesta a tal cuestión viene dada por la siguiente proposición:

Proposición 7.3.1 *Sea* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *un operador lineal, donde* $\mathbb{V}$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial de dimension finita. Entonces, el polinomio característico de la matriz* $\|T\|_B$*, es independiente de la base* B *elegida para calcularlo.*

Demostración 7.3.2 *Sean las bases* B *y* B' *de* $\mathbb{V}$*. Llamemos* P_B *y* $P_{B'}$ *los polinomios característicos de las matrices,* $\|T\|_B$ *y* $\|T\|_{B'}$ *respectivamente, entonces,*

$$P_{B'}(\lambda) = det(\|T\|_{B'} - \lambda I)$$

De acuerdo a la ecuación 7.1 se tiene,

$$\|T\|_{B'} = C(B,B')\|T\|_B C^{-1}(B,B')$$

Por lo tanto,

$$P_{B'}(\lambda) = det\left(C(B,B')\|T\|_B C^{-1}(B,B') - \lambda I\right)$$

Observar que:

$$\begin{array}{rcl} P_{B'}(\lambda) & = & det(C(B,B')\|T\|_B C^{-1}(B,B') - \lambda I) \\ & = & det(C(B,B')\|T\|_B C^{-1}(B,B') - \lambda C(B,B')C^{-1}(B,B')) \\ & = & det(C(B,B'))det(\|T\|_B - \lambda I)det(C^{-1}(B,B')) \\ & = & det(\|T\|_B - \lambda I) \end{array}$$

por lo tanto,

$$P_{B'}(\lambda) = det(\|T\|_B - \lambda I) = P_B(\lambda)$$

$\square$

Observación 7.3.3 *De acuerdo a la Proposición 7.3.1, el polinomio característico asociado al operador lineal T no depende de la base B elegida para calcularlo. Por ende se habla del* ***polinomio característico del operado lineal*** *y escribimos $P(\lambda)$.*

Puesto que $P_B(\lambda) = P(\lambda)$ cualquiera sea la base B, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 7.3.4 *Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un operador lineal, donde $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimension finita. Sean las bases B y B' de $\mathbb{V}$. Entonces los autovalores de la matriz $\|T\|_B$ y la matriz $\|T\|_{B'}$ son los mismos.*

Demostración 7.3.5 *Sean P_B y $P_{B'}$ los polinomios característicos de las matrices, $\|T\|_B$ y $\|T\|_{B'}$ respectivamente. Por la Proposición 7.3.1 se tiene que,*

$$P_{B'}(\lambda) = P_B(\lambda)$$

Puesto que esta última igualdad vale para todo λ, la anulación de $P_{B'}(\lambda)$ implica la anulación de $P_B(\lambda)$ (y viseversa), por lo tanto los autovalores de $\|T\|_B$ y de $\|T\|_{B'}$ son los mismos.
$\square$

Recordemos que habíamos definido el Autoespacio de la matriz A correspondiente al autovalor λ, como $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \ (A - \lambda I)x = 0\}$. En forma similar se define el autoespacio para un operador lineal $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ como,

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{V} : \ (T - \lambda Id)v = 0_{\mathbb{V}}\}$$

La siguiente proposición muestra que la dimensión de este autoespacio no depende de la base elegida para representar la matriz del operador.

Proposición 7.3.6 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimension finita y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un operador lineal. Entonces, la dimensión del autoespacio E_λ, asociado al autovalor λ, no depende de la base B elegida para calcularlo.*

Demostración 7.3.7 *Sea $E_{\lambda,B} = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \ (\|T\|_B - \lambda I)x = 0_{\mathbb{R}^{n\times 1}}\}$ el autoespacio asociado al autovalor λ, cuando se lee su matriz respecto de la base B. Sea $U_{E_{\lambda,B}} = \{x_1, \cdots, x_r\}$ es una base de $E_{\lambda,B}$. Luego,*

$$\|T\|_B x_j = \lambda x_j$$

Supongamos por otro lado que ω es autovector (en realidad las coordenadas de un cierto vector v referido a la base B') de la matriz $\|T\|_{B'}$ asociado al autovalor λ entonces,

$$\|T\|_{B'}\omega = \lambda\omega \tag{7.2}$$

Sabemos que $\|T\|_{B'} = C(B, B')\|T\|_B C^{-1}(B, B')$, al sustituir en la ecuación 7.2 se tiene,

$$(C(B, B')\|T\|_B C^{-1}(B, B'))\omega = \lambda\omega$$

de donde,

$$\|T\|_B(C^{-1}(B, B')\omega) = \lambda(C^{-1}(B, B')\omega)$$

esta última identidad nos dice que, $C^{-1}(B, B')\omega$ es autovector de la matriz $\|T\|_B$, asociado a λ, por lo cual se escribe como combinación lineal de $\{x_1, \cdots, x_r\}$,

$$C^{-1}(B,B')\omega = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r$$

de donde,

$$\omega = \alpha_1 C(B,B')x_1 + \cdots + \alpha_r C(B,B')x_r$$

Es decir que, $\{C(B,B')x_1, \cdots, C(B,B')x_r\}$ *genera el autoespacio asociado al autovalor* λ *de la matriz* $\|T\|_{B'}$. *Puesto que* $\{x_1, \cdots, x_r\}$ *es linealmente independiente entonces,* $\{C(B,B')x_1, \cdots, C(B,B')x_r\}$ *es linealmente independiente y por lo tanto es base del autoespacio asociado al autovalor* λ *de la matriz* $\|T\|_{B'}$ *y tiene dimensión* r $\square$

Observación 7.3.8 *Consideremos* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial de dimension* n *y* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *un operador lineal. Decir que el operador* T *es diagonalizable significa que es diagonalizable respecto de cualquier base que se use para representar su matriz. En particular cuando representamos la matriz de* T *respecto de* $B_{autovectores} = \{u_1, \cdots, u_n\}$ *formada por los autovectores correspondientes a los autovalores* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, *su matriz es una matriz diagonal con los autovalores en la diagonal principal. Como la traza y el determinante son invariantes entonces,*

$$det(T) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

y

$$tr(T) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Capítulo 8

Problemas

8.1. Preguntas

Ejercicio 8.1.1 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial.*

1. *Si $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$, ¿qué condiciones necesarias y suficientes debe cumplir $\mathbb{W}$, para que resulte un Subespacio de $\mathbb{V}$?*

2. *Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{W}$ subespacios de $\mathbb{V}$, decir cuales de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{V}$, siempre resultan subespacios de $\mathbb{V}$. En caso afirmativo dar una demostración y en caso negativo dar un contra ejemplo.*

$$i)\ \mathbb{S} + \mathbb{W} \quad ii)\ \mathbb{S} \cup \mathbb{W} \quad iii)\ \mathbb{S} \cap \mathbb{W}$$

Ejercicio 8.1.2 *Decidir justificando la respuesta, cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.*

1. *Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{W}$ subespacios de $\mathbb{V}$, $\mathbb{K}$ - espacio vectorial, tales que, $\mathbb{S} \subset \mathbb{W}$. Entonces, $\mathbb{S} \cup \mathbb{W}$ es subespacio de $\mathbb{V}$.*

2. *Sea*

$$\mathbb{P} = \{p : p\ es\ polinomio\ a\ coeficientes\ reales\ de\ grado\ exactamente\ n\}$$

Entonces, $\mathbb{P}$ es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial, con la suma y el producto por un escalar, usual de polinomios.

Ejercicio 8.1.3 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial de $dim(\mathbb{V}) = n$ y sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{W}$ subespacios de $\mathbb{V}$*

i) Demostrar la siguiente proposición: Si $dim(\mathbb{S}) = n - 1$ y $dim(\mathbb{W}) = n - 1$ entonces,

$$n - 2 \leq dim\,(\mathbb{S} \cap \mathbb{W}) \leq n - 1$$

ii) Dar un ejemplo de la afirmación probada en i) cuando, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$. Interpretar geométricamente.

Ejercicio 8.1.4 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$ - espacios vectoriales de dimensión finita. Y sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$.*

1. *Completar y demostrar que: $Im(f)$ es un subespacio de $\cdots$*

2. *Completar y demostrar que:* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *es* ***monomorfismo*** *si y sólo si* $Nu(f) = \cdots$

Ejercicio 8.1.5 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *la matriz diagonal* $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *y la matriz inversible* $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tales que,*

$$A = H.D.H^{-1}$$

1. *Demostrar que* $A^m = H.D^m.H^{-1}$, $\forall m \in \mathbb{N}$

2. *Demostrar que* A *es inversible si y sólo si* $det(D) \neq 0$

3. *Demostrar que* $det(A^m) = (det(D))^m$

4. *Demostrar que:* A *es* ***involutiva*** *si y sólo si* D *es* ***involutiva***.

Ejercicio 8.1.6 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

1. *Definir que es un* ***autovector***, *de la matriz* A *asociado al autovalor* $\lambda \in \mathbb{R}$. *¿Cuál es el significado geométrico de un autovector?*

2. *Demostrar que para* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *el* ***polinomio característico*** *se puede expresar en la forma:*
$$P(\lambda) = \lambda^2 - tr(A).\lambda + det(A)$$

3. *Demostrar que: Si* $(tr(A))^2 > 4.det(A)$ *entonces,* A *es diagonalizable.*

Ejercicio 8.1.7 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$ *- espacio vectorial con producto interno* $\langle\ ,\ \rangle$. *Demostrar que: Si* $u, v \in \mathbb{V}$ *son tales que,* $u \perp v$ *entonces,*

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Ejercicio 8.1.8 *Sea* $\mathbb{V}$, $\mathbb{K}$ *- espacio vectorial,* $dim(\mathbb{V}) = n$. *Sean* $\mathbb{S}$ *y* $\mathbb{W}$ *subespacios de* $\mathbb{V}$. *Demostrar que: Si* $\mathbb{S} \subset \mathbb{W}$ *entonces,* $dim(\mathbb{S} + \mathbb{W}) = dim(\mathbb{W})$.

Ejercicio 8.1.9 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de* $dim(\mathbb{V}) = 3$ *y sea* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ *una base de* $\mathbb{V}$. *Sea* $A = \{u_1, u_2, u_3\}$ *donde:*

$$u_1 = 2v_2 + 12v_3, \quad u_2 = -3v_1 - v_2 + v_3, \quad u_3 = 3v_1 + 2v_2 + 5v_3,$$

Demostrar que el conjunto A *es linealmente dependiente.*

Ejercicio 8.1.10 *Sean* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales de dimensión finita, sea* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de* $\mathbb{V}$. *Sea* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal de* $\mathbb{V}$ *en* $\mathbb{W}$. *Demostrar que:*

$$Im(f) = gen\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$$

Ejercicio 8.1.11 *Sean* $\mathbb{V}$ *y* $\mathbb{W}$, $\mathbb{R}$*-espacios vectoriales, tales que,* $dim(\mathbb{V}) = n$ *y* $dim(\mathbb{W}) = m$. *Sea* $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *una transformación lineal de* $\mathbb{V}$ *en* $\mathbb{W}$. *Completar y justificar la respuesta:*

Si T *es un* ***Epimorfismo*** *entonces,* $dim(Nu(T)) = \ldots.$

¿Qué relación guardan los números n *y* m*?*

Ejercicio 8.1.12 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita, sea $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ un **monomorfismo** de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Demostrar que:*

$$B_{Im(f)} = \{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$$

es una base de la imagen de f.

Ejercicio 8.1.13 *Sea $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz **no singular**. Demostrar que:*

$$det(C^{-1}) = \frac{1}{det(C)}$$

Ejercicio 8.1.14 *Sea $\mathbb{V}$, un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $dim(\mathbb{V}) = n$ dotado con producto interno $\langle , \rangle$. Demostrar que: Si $A = \{v_1, \ldots, v_r\}$ (con $r \leq n$), es un conjunto ortogonal entonces, A es linealmente independiente.*

Ejercicio 8.1.15 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$ - espacio vectorial. Sean $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ subespacios de $\mathbb{V}$. Demostrar que $\mathbb{S} \cap \mathbb{W}$ es subespacio de $\mathbb{V}$.*

Ejercicio 8.1.16 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, tales que, $dim(\mathbb{V}) = n$ y $dim(\mathbb{W}) = m$. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $U = \{w_1, \ldots, w_m\}$ una base de $\mathbb{W}$. Demostrar que para cualquier $v \in \mathbb{V}$ se satisface:*

$$[T(v)]_U = \|T\|_{BU} [v]_B$$

Ejercicio 8.1.17 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bases de $\mathbb{V}$. Demostrar que:*

$$[v]_{B_2} = C(B_1, B_2) [v]_{B_1}$$

Ejercicio 8.1.18 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimension n y sean las bases B y B' de $\mathbb{V}$. Sea $\mathcal{A} = \{u_1, \cdots, u_r\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{V}$, demostrar:*

1. *$\mathcal{A} = \{u_1, \cdots, u_r\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{V}$ si sólo si, $\mathcal{A}' = \{[u_1]_B, \cdots, [u_r]_B\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^{n\times 1}$*

2. *$\mathcal{A} = \{u_1, \cdots, u_r\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{V}$ si sólo si, $\mathcal{A}'' = \{C(B, B')[u_1]_B, \cdots, C(B, B')[u_r]_B\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^{n\times 1}$*

Ejercicio 8.1.19 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz **Ortogonal**. Si $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ es un autovalor de A, y $v \neq 0$ el autovector asociado al autovalor λ . ¿Qué relación existe entre λ y el autovalor de A^t ? y ¿entre v y el autovector de A^t ?*

Ejercicio 8.1.20 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, $dim(\mathbb{V}) = n$ dotado con producto interno $\langle , \rangle$. Demostrar que: Si $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto ortogonal entonces,*

$$\|v_1 + v_2 + v_3\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \|v_3\|^2$$

Teorema 8.1.21 *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Sean $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{V}$ y $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ subespacios de $\mathbb{V}$. Demostrar que $\mathbb{S} + \mathbb{W}$ es subespacio de $\mathbb{V}$.*

Ejercicio 8.1.22 *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$, $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, tales que, $dim(\mathbb{V}) = n$ y $dim(\mathbb{W}) = m$. Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Demostrar que T es **monomorfismo** si y sólo si $Nu(T) = \{0_{\mathbb{V}}\}$.*

8.2. Problemas

Ejercicio 8.2.1 *Dadas* $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *definidas por:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

Se define

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

1. *Demostrar que se cumple:* $det(C) = det(A)det(B)$

2. *Calcular los autovalores de la matriz:*

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Sugerencia*: Usar el item 1 de este problema.*

3. *Decidir si la matriz* M *es diagonalizable, justificando la respuesta.*

Ejercicio 8.2.2 *Considerar* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *la transformación lineal, cuya matriz asociada en la base* $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *y la base* $U = \{(1,1), (1,-1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *es:*

$$\|g\|_{BU} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *Hallar una base del núcleo de* g

b) *Hallar una base de la imagen de* g

Ejercicio 8.2.3 *Sea* $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ *dada por:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calcular los autovalores y autovectores de* $A = BB^t$

2. *De ser posible expresar a la matriz* A *en la forma:*

$$A = PDP^{-1}$$

   Donde D *es una matriz diagonal y* P *una matriz invertible.*

Ejercicio 8.2.4 *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la transformación lineal, cuya matriz asociada en la base canónica* E *de* $\mathbb{R}^3$ *es:*

$$\|T\|_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

a) *Hallar una base del núcleo.*

b) *Hallar una base de la imagen.*

c) *Calcular todos los vectores* $v \in \mathbb{R}^3$ *tales que,* $f(v) = (2, 5, 3)$

Ejercicio 8.2.5 *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la función definida por:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_1 + 2x_3)$$

1. *Hallar la matriz* $A = \|T\|_E$*, asociada a* T *en la base canónica* E *de* $\mathbb{R}^3$

2. *Demostrar que* T *no es un* ***automorfismo***

3. *Demostrar que* $Im(T)$ *es un plano de* $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 8.2.6 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *dada por:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calcular los autovalores y autovectores de* $B = AA^t$

2. *¿Es diagonalizable la matriz* B*?*

Ejercicio 8.2.7 *Sea* $\mathbb{R}^4$ *pensado como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial con la suma y el producto usual. Además se dota a* $\mathbb{R}^4$ *con el producto* ***interno canónico*** $\langle\ ,\ \rangle$.

1. *¿ Cuáles son las nociones métricas que quedan inducidas por el producto interno* $\langle\ ,\ \rangle$*?*

2. *Sea el subespacio* $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^4$ *tal que,* $\mathbb{W} = \{(1, 1, 1, 0), (0, -1, 1, 1)\}$

   a) *Hallar una base* ***ortonormal*** *de* $\mathbb{W}$

   b) *Hallar el* ***complemento ortogonal*** *de* $\mathbb{W}$

Ejercicio 8.2.8 *Sea* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la función definida por:*

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, \lambda x_2 + x_3, x_3)$$

donde, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Demostrar que* T *es un* ***endomorfismo*** *de* $\mathbb{R}^3$

2. *Hallar la matriz* $\|T\|$*, asociada a* T *en la base canónica de* $\mathbb{R}^3$

3. *Calcular* $det(T)$

4. *Demostrar que* T *es* ***automorfismo*** *si y sólo si* $\lambda \neq 0$

Ejercicio 8.2.9 *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de* $dim(\mathbb{V}) = 4$ *y sea* $B_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *base de* $\mathbb{V}$*. Considerar el conjunto,* $B_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$*, donde:*

$$u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \quad u_2 = v_1 + v_2 + v_3, \quad u_3 = v_1 + v_2, \quad u_4 = v_1$$

a) *Demostrar que* B_2 *es base de* $\mathbb{V}$

b) Encontrar, $C(B_1, B_2)$ *y* $C(B_2, B_1)$

Ejercicio 8.2.10 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *dada por:*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. *Calcular los autovalores y autovectores de* A
2. *Escribir a la matriz* A *en la forma:* $A = P.D.P^{-1}$
3. *Calcular* A^{10} *usando lo probado en 2.*

Bibliografía

[1] Notas de Álgebra Lineal. (2016). Ana Rosso – Julio Barros. Ed. UniRío.

[2] Álgebra Lineal. (2006). Grossman Stanley. Quinta Edición. Ed. Mc. Graw-Hill.

[3] Álgebra Lineal y sus aplicaciones (2007) Lay David. Ed. Pearson. Addison- Wesley.

[4] Álgebra Lineal. (1976). Lang Serge. Ed. Fondo educativo interamericano.

[5] Álgebra Lineal y sus aplicaciones (1986) Strang, Gilbert. Ed. Addison-Wesley.

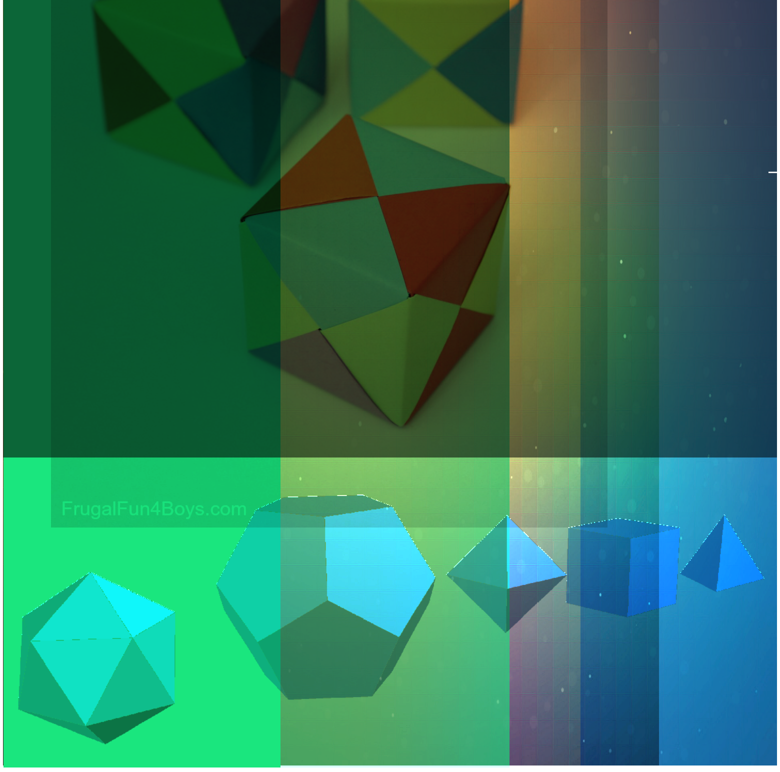
[6] Introducción al Álgebra Lineal. (2009). Anton H. Editorial Limusa-Wiley.

[7] Álgebra Lineal. (1979) Kenneth Hoffman; Kunze, Ray. Ed. Prentice Hall.

[8] Fundamentos de Algebra Lineal y aplicaciones. (1980) Florey, Francis G. 1a ed. Ed. Prentice Hall.

[9] Álgebra Lineal con MatLab (1999) Colman Bernard, Hill, David R. 6a ed Ed. Prentice Hall.

[10] Introduction to Linear Algebra (2009) Strang, G. Wellesley Cambrige Press.



Tópicos de álgebra lineal

Julio C. Barros y Valentina Orquera

El texto comienza presentando la estructura de espacio vectorial. Este hecho es motivado porque entendemos que hay que dar un tratamiento acompasado de los temas nucleares de este tópico, como lo son combinaciones lineales, dependencia e independencia lineal, base y dimensión. A partir de un recorte adecuado de estos conceptos, se construyen otras ideas centrales, como lo son la de coordenadas y cambio de base. La estructura de espacio vectorial se ve enriquecida con nociones métricas cuando se lo dota con un producto interno. Al desarrollar el tema de transformaciones lineales, se hace particular énfasis en el tratamiento de la matriz asociada a una transformación lineal, y en cómo se puede recuperar toda la información referente a núcleo e imagen a partir de dicha matriz. Hay un tratamiento breve de las transformaciones ortogonales haciendo nexo con la estructura de espacio con producto interno y recuperando elementos geométricos. La noción de determinante ha sido abordada en forma sucinta, y está pensada como herramienta para aplicar al problema de valores propios. Al abordar el problema de vectores y valores propios, se puede apreciar todo el potencial que tienen las ideas construidas. La diagonalización de matrices es presentada en su forma más elemental, pero introduciendo conceptos que sirven para una profundización en este tópico. El grado de abstracción para aproximarse a la idea de espacio dual puede resultar un poco arduo al principio, pero rinde su fruto al hacer el tratamiento de coordenadas y soluciones de sistema de ecuaciones. Invariantes bajo semejanza de matrices nos pareció un corolario adecuado para cerrar este material y dar una noción de la potencia de las ideas tratadas.

Colección PASATEXTOS
UniRío editora
ISBN 978-987-688-264-4
9 789876 882644
e-book
Universidad Nacional de Río Cuarto